



UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA  
CENTRO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

RONIEL DOS SANTOS OLIVEIRA

**TRANSFORMAÇÕES LINEARES EM NOVAS ESTRUTURAS**

Boa Vista, RR

2022

RONIEL DOS SANTOS OLIVEIRA

**TRANSFORMAÇÕES LINEARES EM NOVAS ESTRUTURAS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como pré-requisito para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Roraima.

Orientador: Prof. Dr. Elzimar de Oliveira  
Rufino

Coorientador: Prof. Dr. Guilherme Zsigmond  
Machado

Boa Vista, RR

2022

Dados Internacionais de Catalogação Na Publicação (CIP)  
Biblioteca Central da Universidade Federal de Roraima

O48t Oliveira, Roniel dos Santos.  
Transformações lineares em novas estruturas / Roniel dos Santos Oliveira. – Boa Vista, 2022.  
60 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Elzimar de Oliveira Rufino.  
Coorientador: Prof. Dr. Guilherme Zsigmond Machado.  
Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal de Roraima, Curso de Licenciatura em Matemática.

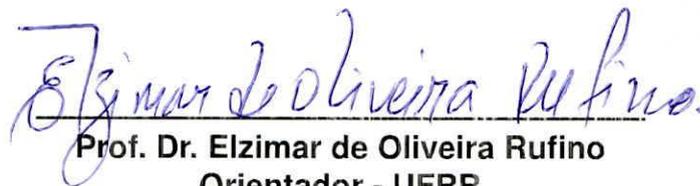
1 – Transformação linear. 2 – Novas estruturas. 3 – Espaço vetorial. I – Título. II – Rufino, Elzimar de Oliveira (orientador). III – Machado, Guilherme Zsigmond (coorientador).

CDU – 512.643

RONIEL DOS SANTOS OLIVEIRA

## TRANSFORMAÇÕES LINEARES EM NOVAS ESTRUTURAS

Trabalho de conclusão de curso apresentado como pré-requisito para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Roraima. Defendido em 14 de dezembro de 2022 e avaliada pela seguinte banca examinadora:



**Prof. Dr. Elzimar de Oliveira Rufino**  
Orientador - UFRR

  
**Prof. Dr. Guilherme Zsigmond Machado**  
Membro/DMAT-UFRR

  
**Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Kelly Karina Santos**  
Membro/DMAT-UFRR

Boa Vista, RR  
2022

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, que me capacitou e me guiou para que eu chegasse até aqui, sem ele nada disso seria possível.

Aos meus pais, Joel da Silva Oliveira e Rosilene Rodrigues dos Santos, e meu irmão, Ryelson dos Santos Oliveira, minhas maiores motivações, e razões pelas quais continuo lutando pelos meus sonhos e objetivos.

Ao professor, Dr Elzimar de Oliveira Rufino por toda a paciência e por ter me orientado no desenvolvimento deste trabalho.

A todos os professores do Departamento de Matemática que de alguma maneira contribuíram para a minha formação.

## RESUMO

Neste trabalho estudamos as transformações lineares em estruturas de espaços vetoriais que são obtidas através de bijeções com um espaço vetorial inicial  $e$ , em particular, nos espaços vetoriais do tipo gráfico. Também exploramos o conceito de retas em espaços vetoriais, em analogia com a definição de retas nos espaços vetoriais  $\mathbb{R}^n$ . Exploramos as métricas induzidas pelas bijeções com o intuito de melhor entender a ação das transformações lineares nos espaços vetoriais estudados. Tratamos de algumas transformações lineares já conhecidas como cisalhamentos, rotações e reflexões em torno da origem.

**Palavras-chave:** Transformação linear. Novas estruturas. Espaço vetorial.

## ABSTRACT

In this work, we study the linear transformations in structures of vector spaces that are obtained through bijections with an initial vector space and, particularly, in vector spaces of the graphic type. We also explore the concept of lines in vector spaces, in analogy with the definition of lines in vector spaces  $\mathbb{R}^n$ . We explore the metrics induced by bijections to better understand linear transformations' action in studied vector spaces. We deal with some already-known linear transformations such as shears, rotations, and reflections around the origin.

**Key-words:** Linear transformation. New structures. Vector space.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

1	Espaço Vetorial $\mathbb{R}^2$ .....	12
2	Subespaço $S$ de $\mathbb{R}^2$ .....	13
3	Gráfico de $f(x, y) = x^2 + y^2$ . .....	19
4	Gráfico de $f$ . .....	19
5	Ponto $u$ e seu simétrico com relação a origem de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ .....	21
6	Projeção estereográfica via polo norte .....	22
7	Reta $s$ .....	27
8	Reta $r$ .....	28
9	Reta $r$ passando pelos pontos $A$ e $B$ . .....	28
10	Dilatação do vetor .....	29
11	Contração do vetor .....	30
12	Cisalhamento .....	30
13	Rotação em torno da origem. ....	31
14	Reflexão em torno origem .....	31
15	Representação de $N(T)$ . ....	32
16	Representação de $Im(T)$ . ....	33
17	O ponto $(x, y, z)$ e seu simétrico $T(x, y, z)$ em relação à origem no parabolóide. ....	37
18	Ponto $u$ e sua imagem obtida através da rotação $\frac{\pi}{2}$ . ....	37
19	Ponto $u$ e seu simétrico em relação a origem. ....	39
20	Rotação em torno da origem aplicada no triângulo $ABC$ . ....	40
21	Ponto $(5, 2)$ e seu simétrico $(\frac{1}{5}, \frac{1}{2})$ em relação a origem de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ . ..	45
22	Cisalhamento aplicado no triângulo $ABC$ . ....	46
23	Rotação em torno da origem de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ aplicada no triângulo $ABC$ . ..	47
24	Pontos simétricos, via reflexão, em relação à origem de $S^2 - \{N\}$ . ....	50
25	Ponto $(0, 1, 0)$ e sua imagem obtida através da rotação $R_{\frac{\pi}{2}}$ em torno da origem. ....	51
26	Dilatação na esfera. ....	52
27	Núcleo de $H$ . ....	55
28	Imagem da transformação $H(x, y)$ .....	57

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>PRELIMINARES</b> .....	<b>11</b>
2.1	ESPAÇOS VETORIAIS.....	11
<b>2.1.1</b>	<b>Subespaço vetorial</b> .....	<b>12</b>
<b>2.1.2</b>	<b>Métrica e espaço métrico, norma e produto interno</b> .....	<b>13</b>
<b>2.1.3</b>	<b>Vetores ortogonais</b> .....	<b>16</b>
2.2	NOVAS ESTRUTURAS DE ESPAÇOS VETORIAIS .....	16
2.3	RETAS EM ESPAÇOS VETORIAIS.....	26
2.4	TRANSFORMAÇÕES LINEARES .....	29
<b>2.4.1</b>	<b>Núcleo e imagem de uma transformação linear</b> .....	<b>31</b>
<b>3</b>	<b>TRANSFORMAÇÕES LINEARES EM NOVAS ESTRUTURAS</b> .....	<b>35</b>
3.1	TRANSFORMAÇÕES LINEARES EM ESPAÇOS VETORIAIS DO TIPO GRÁFICO.....	35
<b>3.1.1</b>	<b>Transformações lineares no parabolóide</b> .....	<b>36</b>
<b>3.1.2</b>	<b>Transformações lineares no espaço vetorial do Exemplo 4</b> .....	<b>37</b>
3.2	TRANSFORMAÇÕES LINEARES EM ESPAÇOS CONSTRUÍDOS VIA BIJEÇÕES.....	42
<b>3.2.1</b>	<b>Transformações lineares em <math>\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+</math></b> .....	<b>43</b>
<b>3.2.2</b>	<b>Transformações lineares em <math>S^2 - \{N\}</math></b> .....	<b>48</b>
3.3	NÚCLEO E IMAGEM DE TRANSFORMAÇÕES LINEARES EM NOVAS ESTRUTURAS .....	53
<b>4</b>	<b>CONCLUSÃO</b> .....	<b>59</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>60</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A teoria das transformações lineares está intimamente ligada à álgebra matricial. O grande propulsor para o avanço dessa teoria e o surgimento da ideia de espaço vetorial, foi o estudo dos sistemas lineares.

Segundo Nogueira (2013), o matemático suíço Leonhard Euler, em meados de 1770, conseguiu caracterizar as transformações ortogonais para  $n = 2$  e  $3$ , quando estudava quadrados de números similares aos quadrados mágicos. Dando continuidade ao trabalho de Euler, Joseph Louis Lagrange publicou entre 1773 e 1775, um trabalho no qual estudou a propriedade de números que são a soma de dois quadrados. Assim, foi levado a estudar os efeitos das transformações lineares com coeficientes inteiros numa forma quadrática de duas variáveis. Johann Carl Friedrich Gauss, por sua vez, também estudou a questão com duas e três variáveis. Ele apresentou uma notação similar a da matriz que caracteriza a transformação linear. Além disso, Gauss estabeleceu a fórmula e uma notação simbólica para a composição de duas transformações lineares e também para o produto, o que marca um passo fundamental em direção ao conceito de matriz. Hermann Gunther Grassmann, em uma publicação de 1844, discutiu e obteve uma boa parte dos resultados elementares da teoria atual de espaços vetoriais e de álgebra linear, além de ter conseguido algo bem próximo de uma formalização axiomática.

Segundo Boyer (2019), o matemático inglês Arthur Cayley<sup>1</sup> foi um dos primeiros a estudar matrizes, definindo a ideia de operarmos as matrizes como na álgebra. Cayley descobriu a álgebra das matrizes em 1857. Ainda segundo Boyer (2019), as matrizes surgiram para Cayley ligadas às transformações lineares do tipo

$$X = ax + by \quad (1.1)$$

$$Y = cx + dy \quad (1.2)$$

com  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Pode-se pensar como a ação de uma transformação que leva o ponto  $(x, y)$  no ponto  $(X, Y)$ . Para simplificar, Cayley escrevia as equações (1.1) e (1.2) na forma matricial

$$(X, Y) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} (x, y).$$

A partir destas duas transformações sucessivas, criou-se a definição de produto de matrizes, como também a matriz inversa, a matriz identidade, a matriz nula e a matriz

---

<sup>1</sup> Arthur Cayley nasceu em 16 de agosto de 1821 em Richmond na Inglaterra. Em 1838 começou seus estudos no Trinity College em Cambridge onde se graduou em 1842. Em 1843 trabalhou fundamentalmente em álgebra, mas, também trabalhou em geometrias não-euclidianas e geometria  $n$ -dimensional, usando determinantes como elemento essencial.

idêntica. No entanto, somente três anos mais tarde introduziu-se o conceito de soma e produto de matrizes por escalares, dando ênfase para as propriedades algébricas dessas operações.

Segundo destaca Nogueira (2013), Giuseppe Peano (1858-1952) publicou em 1888 uma definição axiomática do que ele chamou de “sistema linear”, que foi considerada a primeira definição axiomática de um espaço vetorial, mas a teoria de espaços vetoriais não foi desenvolvida antes de 1920.

Recentemente, Lopes (2018) construiu novos exemplos de espaços vetoriais considerando como ponto de partida um espaço vetorial inicial. Em seu trabalho faz-se uso de bijeções para a construção. Na verdade estas ideias estão fundamentadas no teorema do isomorfismo para espaços vetoriais.

Inspirados pelo trabalho de Lopes (2018) e por um exemplo do tipo gráfico (parábola) que pode ser visto em Steinbruch e Winterle (1987), Rufino e Naveca (2021) construíram novos exemplos de espaços vetoriais do tipo gráfico utilizando os ambientes  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ . Além disso, eles tratam sobre subespaços do tipo gráfico e ortogonalidade.

Neste trabalho mostraremos como construir transformações lineares em espaços vetoriais cujas estruturas são obtidas via bijeções com um espaço vetorial inicial e em particular nos espaços vetoriais do tipo gráfico. Veremos que as transformações lineares estão intimamente relacionadas ao modo como foram construídas as operações de adição e multiplicação por escalar.

O Capítulo 1 é a introdução do trabalho, onde procuramos fazer uma panorama e detalhar o que foi feito em cada um dos capítulos posteriores.

Na Capítulo 2 foi feita uma abordagem de assuntos que serão necessários para a compreensão do objetivo principal do nosso estudo. Esta abordagem é concentrada no estudo de espaços vetoriais, onde são apresentados conceitos e exemplos, além de mostrar como é feita a construção das novas estruturas de espaço vetoriais, o que será de grande importância para o nosso estudo. Essas construções são feitas através de bijeções entre espaços vetoriais e conjuntos não vazios, sendo possível definir operações nesses conjuntos de modo que se obtenha uma estrutura de espaço vetorial. Além disso, também é possível definir novas estruturas em espaços vetoriais, possibilitando dar a um mesmo conjunto mais do que uma estrutura de Espaço Vetorial. Nesta seção também exploramos os conceitos de métricas, produto interno e norma.

No Capítulo 3 trabalhamos as transformações lineares nas novas estruturas de espaços vetoriais. O capítulo é dividido em seções, onde cada uma trata de um espaço vetorial, e dentro de cada seção são trabalhados os casos particulares dessas transformações lineares. É possível ver que as transformações nas novas estruturas

estão diretamente ligadas à maneira que elas estão definidas nos espaços vetoriais iniciais. Desse modo, mostramos como obter várias transformações lineares em novas estruturas utilizando transformações lineares conhecidas nos espaços vetoriais conhecidos.

## 2 PRELIMINARES

Neste capítulo apresentaremos alguns conceitos e resultados necessários para a compreensão dos capítulos posteriores.

### 2.1 ESPAÇOS VETORIAIS

**Definição 2.1.1.** *Seja  $E$  um conjunto não-vazio, sobre o qual estão definidas uma operação de adição*

$$+ : E \times E \longrightarrow E \\ (u,v) \longmapsto u+v$$

*e uma operação de multiplicação por escalar*

$$\cdot : \mathbb{R} \times E \longrightarrow E \\ (\alpha,u) \longmapsto \alpha \cdot u$$

*A estrutura  $(E, +, \cdot)$  é chamada de espaço vetorial real (ou espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ ) se forem verificados os seguintes axiomas:*

*A) Em relação a adição:*

$$A_1) (u + v) + w = u + (v + w), \forall u, v, w \in E$$

$$A_2) u + v = v + u, \forall u, v \in E$$

$$A_3) \exists 0 \in E, \forall u \in E, u + 0 = u$$

$$A_4) \forall u \in E, \exists (-u) \in E, u + (-u) = 0$$

*M) Em relação a multiplicação por escalar:*

$$\forall u, v \in E \text{ e } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$M_1) (\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$$

$$M_2) (\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$$

$$M_3) \alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$$

$$M_4) 1 \cdot u = u$$

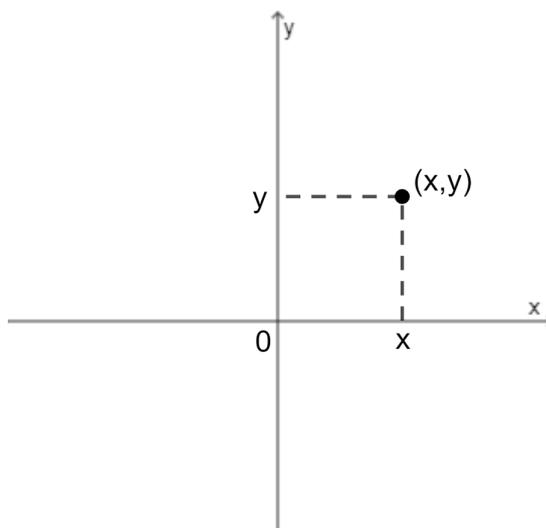
**Exemplo 2.1.1.** *O conjunto  $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) / x, y \in \mathbb{R}\}$  com as operações de adição e multiplicação por um número real definidas por*

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ \alpha \cdot (x, y) = (\alpha \cdot x, \alpha \cdot y)$$

constitui o espaço vetorial  $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ . Chamaremos este espaço vetorial de espaço  $\mathbb{R}^2$  canônico. Para mais detalhes sobre este espaço vetorial o leitor poderá consultar Steinbruch e Winterle (1987).

A Figura 1 mostra uma representação geométrica do espaço  $\mathbb{R}^2$ .

Figura 1 – Espaço Vetorial  $\mathbb{R}^2$



Fonte: Autor

### 2.1.1 Subespaço vetorial

**Definição 2.1.2.** Um subconjunto não-vazio  $S$  de um espaço vetorial  $E$  constitui um subespaço vetorial de  $E$  quando for munido das operações de  $E$  e forem satisfeitas as condições:

- i) Para quaisquer  $u, v \in S$ , tem-se  $u + v \in S$ .
- ii) Para quaisquer  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $u \in S$ , tem-se  $\alpha \cdot u \in S$ .

Em outras palavras é um subconjunto não-vazio fechado para a soma e multiplicação por escalar.

**Exemplo 2.1.2.** Seja  $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  o espaço vetorial do Exemplo 2.1.1. O subconjunto  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 2x\}$  constitui um subespaço vetorial  $(S, +, \cdot)$  de  $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ .

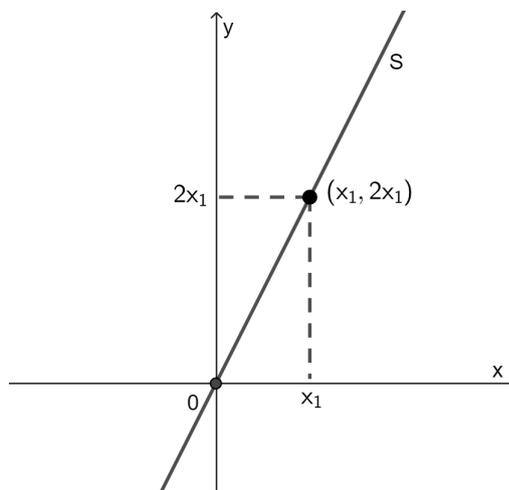
De fato: note que  $S \neq \emptyset$ , pois  $(0, 0) \in S$ . Além disso, para  $u = (x_1, 2x_1)$  e  $v = (x_2, 2x_2)$  pertencentes a  $S$ , tem-se:

- i)  $u + v = (x_1 + x_2, 2x_1 + 2x_2) = (x_1 + x_2, 2(x_1 + x_2)) \in S$ , pois a segunda componente de  $u + v$  é igual ao dobro da primeira.

ii)  $\alpha \cdot u = \alpha(x_1, 2x_1) = (\alpha \cdot x_1, 2(\alpha \cdot x_1)) \in S$ , pois a segunda componente de  $\alpha \cdot u$  é igual ao dobro da primeira.

A Figura 2 mostra uma representação geométrica do subespaço vetorial  $(S, +, \cdot)$

Figura 2 – Subespaço S de  $\mathbb{R}^2$



Fonte: Autor

De modo geral, qualquer subespaço não trivial  $S$  do espaço  $\mathbb{R}^2$  canônico é constituído por uma reta que passa pela origem  $(0, 0)$ . Em notação simbólica

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = ax + b, \text{ com } a, b \in \mathbb{R}\}.$$

### 2.1.2 Métrica e espaço métrico, norma e produto interno

Um conceito que utilizaremos em nosso trabalho é o conceito de métrica. Nesse sentido, temos a seguinte definição, que pode ser vista em Lima (1983).

**Definição 2.1.3.** Uma métrica num conjunto  $M \neq \emptyset$  é uma função  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ , que associa a cada par ordenado de elementos  $x, y \in M$  um número real  $d(x, y)$ , chamado a distância de  $x$  a  $y$ , de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer  $x, y, z \in M$ :

$$D_1) \quad d(x, x) = 0;$$

$$D_2) \quad \text{Se } x \neq y \text{ então } d(x, y) > 0;$$

$$D_3) \quad d(x, y) = d(y, x);$$

$$D_4) \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

As condições  $D_1$  e  $D_2$  nos dizem que  $d$  é uma função não negativa. A condição  $D_4$  é chamada de desigualdade triangular.

**Exemplo 2.1.3.** Seja  $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$  o conjunto das ternas de números reais. Se  $u = (x_1, y_1, z_1)$  e  $v = (x_2, y_2, z_2)$  são elementos de  $\mathbb{R}^3$ , então a função  $d : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $d(u, v) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$  é uma métrica. A demonstração deste fato pode ser vista em Lima (1983).

Um conceito importante neste trabalho é o de produto interno em um espaço vetorial. A existência de um produto interno permite que seja definida uma métrica no espaço. Sugerimos ao leitor consultar Lima (2018) e Steinbruch e Winterle (1987) para mais informações.

**Definição 2.1.4.** Chama-se produto interno no espaço vetorial  $E$  uma função de  $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  que a todo par de vetores  $(u, v) \in E \times E$  associa um número real  $\langle u, v \rangle$ , tal que os seguintes axiomas sejam verificados:

$$P_1) \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle, \forall u, v \in E$$

$$P_2) \langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle, \forall u, v, w \in E$$

$$P_3) \langle \alpha \cdot u, v \rangle = \alpha \cdot \langle u, v \rangle, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u, v \in E$$

$$P_4) \langle u, u \rangle \geq 0 \text{ e } \langle u, u \rangle = 0 \text{ se, e somente se, } u = 0, \forall u, v \in E.$$

**Exemplo 2.1.4.** Seja  $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  o espaço vetorial do Exemplo 2.1.1. Dados  $u = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$  e  $v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ , a função  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\langle u, v \rangle = x_1x_2 + y_1y_2$$

é um produto interno, chamado de produto interno usual ou canônico de  $\mathbb{R}^2$ .

De fato. Sejam  $u = (x_1, y_1), v = (x_2, y_2), w = (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ , temos:

$$P_1) \langle u, v \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 = x_2x_1 + y_2y_1 = \langle v, u \rangle$$

$$P_2) \langle u, v + w \rangle = x_1(x_2 + x_3) + y_1(y_2 + y_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + y_1y_2 + y_1y_3 = (x_1x_2 + y_1y_2) + (x_1x_3 + y_1y_3) = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$$

$$P_3) \langle \alpha \cdot u, v \rangle = \alpha x_1x_2 + \alpha y_1y_2 = \alpha \cdot (x_1x_2 + y_1y_2) = \alpha \cdot \langle u, v \rangle$$

$$P_4) \langle u, u \rangle = x_1x_1 + y_1y_1 = x_1^2 + y_1^2 \geq 0 \text{ e } x_1^2 + y_1^2 = 0 \text{ se, e somente se, } x_1 = 0 \text{ e } y_1 = 0, \text{ ou seja, } u = (0, 0).$$

**Exemplo 2.1.5.** Seja  $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  o espaço  $\mathbb{R}^2$  canônico. Dados  $u = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$  e  $v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ , a função  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\langle u, v \rangle = 3x_1x_2 + 4y_1y_2$$

é um produto interno.

Sejam  $u = (x_1, y_1), v = (x_2, y_2), w = (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ , temos:

$$P_1) \langle u, v \rangle = 3x_1x_2 + 4y_1y_2 = 3x_2x_1 + 4y_2y_1 = \langle v, u \rangle$$

$$P_2) \langle u, v + w \rangle = 3x_1(x_2 + x_3) + 4y_1(y_2 + y_3) = 3x_1x_2 + 3x_1x_3 + 4y_1y_2 + 4y_1y_3 = (3x_1x_2 + 4y_1y_2) + (3x_1x_3 + 4y_1y_3) = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$$

$$P_3) \langle \alpha \cdot u, v \rangle = 3\alpha x_1x_2 + 4\alpha y_1y_2 = \alpha \cdot (3x_1x_2 + 4y_1y_2) = \alpha \cdot \langle u, v \rangle$$

$$P_4) \langle u, u \rangle = 3x_1x_1 + 4y_1y_1 = 3x_1^2 + 4y_1^2 \geq 0 \text{ e } 3x_1^2 + 4y_1^2 = 0 \text{ se, e somente se, } x_1 = 0 \text{ e } y_1 = 0, \text{ ou seja, } u = (0, 0).$$

A seguir damos a definição de norma, a qual pode ser vista em Lima (1983). As normas em espaços vetoriais permitem que sejam definidas métricas nesses espaços.

**Definição 2.1.5.** Seja  $E$  um espaço vetorial real. Uma norma em  $E$  é uma função real  $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ , que associa a cada vetor  $u \in E$  o número real  $\|u\|$ , chamado a norma de  $u$ , de modo a serem cumpridas as condições abaixo para quaisquer  $u, v \in E$  e  $\lambda$  escalar:

$$N_1) \text{ Se } u \neq 0 \text{ então } \|u\| \neq 0;$$

$$N_2) \|\lambda \cdot u\| = |\lambda| \cdot \|u\|;$$

$$N_3) \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

**Exemplo 2.1.6.** Se  $E$  é um espaço vetorial munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ , podemos obter uma norma em  $E$  definindo-se

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}, \text{ para todo } u \in E.$$

Para a prova deste fato, sugerimos ao leitor consultar Lima (1983). Se  $E = (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  é o espaço  $\mathbb{R}^2$  canônico com o produto interno dado no Exemplo 2.1.4 e  $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , então  $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Em particular se  $u = (3, -4)$ , temos que

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

### 2.1.3 Vetores ortogonais

De posse de um produto interno podemos definir a ortogonalidade de dois vetores do espaço. É o que consta na seguinte definição.

**Definição 2.1.6.** *Seja  $E$  um espaço vetorial com produto interno. Dois vetores  $u, v \in E$  são ortogonais quando  $\langle u, v \rangle = 0$ .*

Representa-se  $u \perp v$  dois vetores  $u$  e  $v$  ortogonais.

**Exemplo 2.1.7.** *Os vetores  $u = (2, 3)$  e  $v = (-3, 2)$  são ortogonais em  $\mathbb{R}^2$  com o produto interno usual dado no Exemplo 2.1.4, pois:*

$$\langle u, v \rangle = 2(-3) + 3(2) = -6 + 6 = 0.$$

## 2.2 NOVAS ESTRUTURAS DE ESPAÇOS VETORIAIS

Apresentaremos algumas estruturas de espaços vetoriais sobre as quais estudaremos as transformações lineares. O seguinte resultado foi obtido por Rufino e Naveca. Com este resultado eles construíram exemplos de espaços vetoriais do tipo gráfico. Para mais detalhes o leitor pode consultar Rufino e Naveca (2021).

**Teorema 2.2.1** (Rufino, Naveca). *Sejam  $(E, +, \cdot)$  um espaço vetorial  $n$ -dimensional,  $X$  um conjunto não-vazio e  $T : E \rightarrow X$  uma aplicação. Então, o gráfico de  $T$  possui uma estrutura de espaço vetorial  $n$ -dimensional.*

*Demonstração.* A prova desse resultado consiste em munir o gráfico  $G(T)$  com uma operação de adição e outra de multiplicação por escalar, satisfazendo as condições de espaço vetorial. Dados  $u, v \in E$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , utilizaremos a notação  $u + v$  para indicar a adição e  $\lambda u$  para indicar a multiplicação por escalar, respectivamente, em  $E$ . Além disso, os símbolos  $\oplus$  e  $\odot$  serão utilizados, respectivamente, para denotar a adição e a multiplicação em  $G(T)$ . A operação de adição  $\oplus : G(T) \times G(T) \rightarrow G(T)$  e a de multiplicação por escalar  $\odot : \mathbb{R} \times G(T) \rightarrow G(T)$  serão definidas por

$$\begin{aligned}(u, T(u)) \oplus (v, T(v)) &= (u + v, T(u + v)), \\ \lambda \odot (u, T(u)) &= (\lambda \cdot u, T(\lambda \cdot u)).\end{aligned}$$

Verificaremos que são satisfeitas as propriedades de espaço vetorial.

Dados  $u = (u, T(u)), v = (v, T(v)), w = (w, T(w)) \in G(T)$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , temos:

## 1. Associatividade:

$$\begin{aligned}
u \oplus (v \oplus w) &= (u, T(u)) \oplus ((v, T(v)) \oplus (w, T(w))) \\
&= (u, T(u)) \oplus ((v + w), T(v + w)) \\
&= (u + (v + w), T(u + (v + w))) \\
&= ((u + v) + w, T((u + v) + w)) \\
&= (u + v, T(u + v)) \oplus (w, T(w)) \\
&= ((u, T(u)) \oplus (v, T(v))) \oplus (w, T(w)) \\
&= (u \oplus v) \oplus w.
\end{aligned}$$

## 2. Comutatividade

$$\begin{aligned}
u \oplus v &= (u, T(u)) \oplus (v, T(v)) \\
&= (u + v, T(u + v)) \\
&= (v + u, T(v + u)) \\
&= (v, T(v)) \oplus (u, T(u)) \\
&= v \oplus u.
\end{aligned}$$

3. O elemento nulo é dado por  $0 = (0, T(0)) \in G(T)$ . De fato:

$$\begin{aligned}
0 \oplus (u, T(u)) &= (0, T(0)) \oplus (u, T(u)) \\
&= (0 + u, T(0 + u)) = (u, T(u)).
\end{aligned}$$

4. O simétrico do elemento  $u = (u, T(u)) \in G(T)$  é dado por  $-u = (-u, T(-u))$ . De fato:

$$\begin{aligned}
(u, T(u)) \oplus (-u, T(-u)) &= (u + (-u), T(u + (-u))) \\
&= (0, T(0)) = 0.
\end{aligned}$$

## 5. Associatividade

$$\begin{aligned}
(\alpha \cdot \beta) \odot u &= (\alpha \cdot \beta) \odot (u, T(u)) \\
&= ((\alpha \cdot \beta) \cdot u, T((\alpha \cdot \beta) \cdot u)) \\
&= (\alpha \cdot (\beta \cdot u), T(\alpha \cdot (\beta \cdot u))) \\
&= \alpha \odot (\beta \cdot u, T(\beta \cdot u)) \\
&= \alpha \odot (\beta \odot (u, T(u))) \\
&= \alpha \odot (\beta \odot u).
\end{aligned}$$

## 6. Distributividade da multiplicação

$$\begin{aligned}
(\alpha + \beta) \odot u &= (\alpha + \beta) \odot (u, T(u)) \\
&= ((\alpha + \beta) \cdot u, T((\alpha + \beta) \cdot u)) \\
&= (\alpha \cdot u + \beta \cdot u, T(\alpha \cdot u + \beta \cdot u)) \\
&= (\alpha \cdot u, T(\alpha \cdot u)) \oplus (\beta \cdot u, T(\beta \cdot u)) \\
&= \alpha \odot (u, T(u)) \oplus \beta \odot (u, T(u)) \\
&= \alpha \odot u \oplus \beta \odot u.
\end{aligned}$$

## 7. Distributividade da soma

$$\begin{aligned}
\alpha \odot (u \oplus v) &= \alpha \odot ((u, T(u)) \oplus (v, T(v))) \\
&= \alpha \odot (u + v, T(u + v)) \\
&= (\alpha \cdot (u + v), T(\alpha \cdot (u + v))) \\
&= (\alpha \cdot u + \alpha \cdot v, T(\alpha \cdot u + \alpha \cdot v)) \\
&= (\alpha \cdot u, T(\alpha \cdot u)) \oplus (\alpha \cdot v, T(\alpha \cdot v)) \\
&= \alpha \odot (u, T(u)) \oplus \alpha \odot (v, T(v)) \\
&= \alpha \odot u \oplus \alpha \odot v.
\end{aligned}$$

## 8. Multiplicação pela unidade

$$\begin{aligned}
1 \odot u &= 1 \odot (u, T(u)) \\
&= (1 \cdot u, T(1 \cdot u)) \\
&= (u, T(u)) \\
&= u,
\end{aligned}$$

para qualquer  $u \in G(T)$ .

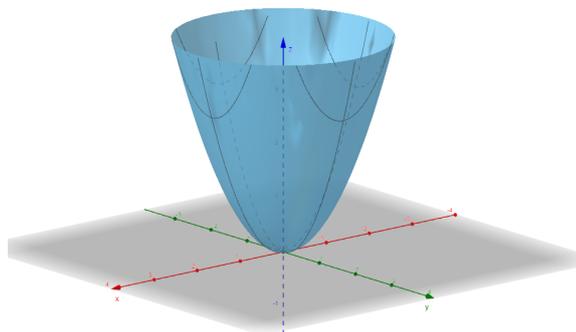
□

Os dois próximos exemplos foram dados por Rufino e Naveca (2021).

**Exemplo 2.2.1.** O Parabolóide  $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = x^2 + y^2\}$  pode ser dotado com a estrutura de espaço vetorial fornecida pelo Teorema 2.2.1. É imediato ver que  $V = G(f)$  onde  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é a função definida por  $f(x, y) = x^2 + y^2$ . As operações em  $(W, \oplus, \odot)$  são definidas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
(x, y, x^2 + y^2) \oplus (z, w, z^2 + w^2) &= (x + z, y + w, (x + z)^2 + (y + w)^2) \\
\lambda \odot (x, y, x^2 + y^2) &= ((\lambda \cdot x, \lambda \cdot y, \lambda^2(x^2 + y^2))).
\end{aligned}$$

Na Figura 3 temos uma representação geométrica de  $V$ .

Figura 3 – Gráfico de  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .

Fonte: Autor

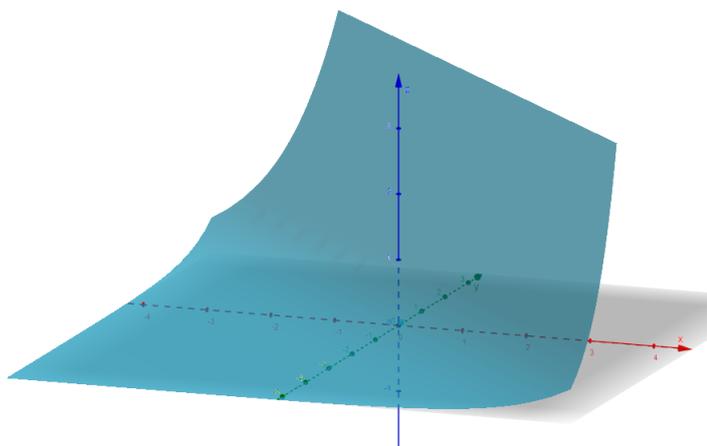
**Exemplo 2.2.2.** Consideremos a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = e^{x+y}$ . O gráfico de  $f$  é o conjunto  $W = \{(x, y, e^{x+y}) / x, y \in \mathbb{R}\}$ . Pelo Teorema 2.2.1,  $G(f) = W$  pode ser dotado com uma estrutura de espaço vetorial. As operações  $\oplus$  e  $\odot$  em  $W$  são definidas da seguinte forma:

Sejam  $u = (x, y, e^{x+y})$  e  $v = (z, w, e^{z+w})$  pertencentes ao espaço vetorial  $W$ , temos que

$$u \oplus v = (x + z, y + w, e^{(x+y)+(z+w)})$$

$$\lambda \odot u = (\lambda \cdot x, \lambda \cdot y, e^{\lambda(x+y)}).$$

O vetor nulo de  $W$  é o elemento  $0 = (0, 0, 1)$  e o simétrico de  $u = (x, y, e^{x+y})$  é o elemento  $-u = (-x, -y, e^{-(x+y)})$ . A Figura 4 mostra uma representação geométrica de  $W$ .

Figura 4 – Gráfico de  $f$ .

Fonte: Autor.

O seguinte resultado foi apresentado por Lopes em sua dissertação de mestrado. Com este resultado ela construiu novos exemplos de espaços vetoriais considerando

bijeções  $\varphi$  entre um espaço vetorial  $E$  e um conjunto  $F$ . Para mais detalhes o leitor pode consultar Lopes (2018).

**Teorema 2.2.2** (Teorema da Estrutura). *Sejam  $F$  um conjunto não-vazio arbitrário e  $(E, +, \cdot)$  um espaço vetorial sobre o corpo  $K$ . Se existe uma função bijetora  $\varphi : E \rightarrow F$ , então podemos definir as operações  $\oplus$  e  $\odot$  em  $F$  de modo que  $(F, \oplus, \odot)$  seja também um espaço vetorial sobre o corpo  $K$ .*

*As operações  $\oplus$  e  $\odot$  em  $F$  são definidas da seguinte forma: Sendo  $u, v \in F$*

$$u \oplus v = \varphi(\varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(v))$$

*e para quaisquer  $\alpha \in K$  e  $u \in F$ ,*

$$\alpha \odot u = \varphi(\alpha \cdot \varphi^{-1}(u)).$$

O espaço vetorial que veremos neste exemplo foi apresentado por Steinbruch e Winterle (1987).

**Exemplo 2.2.3.** *Seja  $\mathbb{R}^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0 \text{ e } y > 0\}$  com as operações definidas da seguinte forma: dados  $u = (x, y)$  e  $v = (z, w)$  pertencentes a  $\mathbb{R}^+$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,*

$$u \oplus v = (x \cdot z, y \cdot w),$$

$$\lambda \odot u = (x^\lambda, y^\lambda).$$

*Mostraremos que essas operações são induzidas por uma bijeção  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ . A aplicação  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  definida por  $\varphi(x, y) = (e^x, e^y)$  é uma bijeção cuja a inversa  $\varphi^{-1} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dada por  $\varphi^{-1}(x, y) = (\ln x, \ln y)$ . Pelo Teorema 2.2.2 podemos dotar  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  de uma estrutura de espaço vetorial.*

*Dados  $u = (x, y)$  e  $v = (z, w)$ , obtemos*

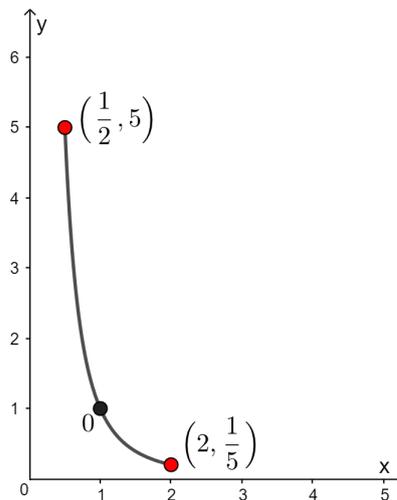
$$\begin{aligned} \varphi(\varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(v)) &= \varphi(\varphi^{-1}(x, y) + \varphi^{-1}(z, w)) \\ &= \varphi((\ln x, \ln y) + (\ln z, \ln w)) \\ &= \varphi(\ln x + \ln z, \ln y + \ln w) \\ &= (e^{(\ln x + \ln z)}, e^{(\ln y + \ln w)}) \\ &= (e^{\ln x} e^{\ln z}, e^{\ln y} e^{\ln w}) \\ &= (xz, yw) \\ &= (u \oplus v). \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
 \varphi(\lambda \cdot \varphi^{-1}(u)) &= \varphi(\lambda \cdot \varphi^{-1}(x, y)) \\
 &= \varphi(\lambda \cdot (\ln x, \ln y)) \\
 &= \varphi(\lambda \cdot \ln x, \lambda \cdot \ln y) \\
 &= \varphi(\ln x^\lambda, \ln y^\lambda) \\
 &= (e^{\ln x^\lambda}, e^{\ln y^\lambda}) \\
 &= (x^\lambda, y^\lambda) \\
 &= \lambda \odot u.
 \end{aligned}$$

O vetor nulo de  $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$  é dado por  $\varphi(0) = (1, 1)$  e o simétrico de um elemento  $u = (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  é dado por  $-u = (\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$ . Por exemplo, na Figura 5 é possível observar o ponto  $u = (2, \frac{1}{5})$  e o seu simétrico  $-u = (\frac{1}{2}, 5)$ .

Figura 5 – Ponto  $u$  e seu simétrico com relação a origem de  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$

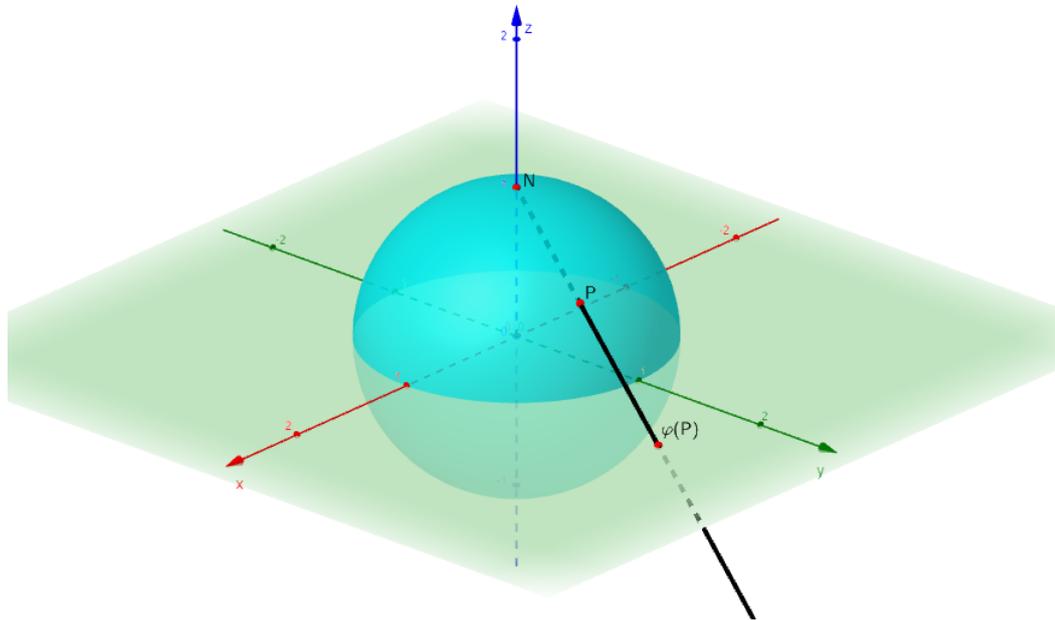


Fonte: Autor.

O próximo exemplo foi apresentado por Lopes (2018) e se baseia aplicação  $\varphi$  entre a esfera menos o pólo norte e o plano  $\mathbb{R}^2$ , chamada projeção estereográfica via pólo norte.

Seja  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  a esfera unitária em  $\mathbb{R}^3$  e  $N = (0, 0, 1)$  o seu polo norte. Vamos deduzir a expressão de uma bijeção entre  $S^2 - \{N\}$  e o plano  $\mathbb{R}^2$ , chamada de projeção estereográfica via polo norte. Ao identificarmos o plano  $\mathbb{R}^2$  com o plano  $z = 0$ , a projeção estereográfica via polo norte associa cada ponto  $P \in S^2 - \{N\}$  ao ponto  $\varphi(P)$  da semirreta  $\overrightarrow{NP}$  que encontra o semiplano  $z = 0$ , conforme mostra a Figura 6.

Figura 6 – Projção estereográfica via polo norte



Fonte: Autor.

Seja  $P = (x_1, x_2, x_3) \in S^2 - \{N\}$ . Um ponto da semirreta  $\overrightarrow{NP}$  possui a forma  $(1-t)N + tP$  com  $t > 0$ . Note que

$$\begin{aligned} (1-t)N + tP &= (1-t)(0, 0, 1) + t(x_1, x_2, x_3) \\ &= (0, 0, 1-t) + (tx_1, tx_2, tx_3) \\ &= (tx_1, tx_2, (1-t) + x_3). \end{aligned}$$

Desejamos determinar um  $t > 0$  tal que  $(1-t) + x_3 = 0$ . Mas  $(1-t) + x_3 = 0$  se, e somente se,  $t = \frac{1}{1-x_3}$ . Substituindo esse valor na expressão anterior obtemos

$$(1-t)N + tP = \left( \frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3}, 0 \right).$$

Por identificação de  $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$  com  $\mathbb{R}^2$ , definimos a aplicação  $\varphi : S^2 - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  por

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \left( \frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3} \right),$$

chamada de projeção estereográfica via polo norte.

**Exemplo 2.2.4.** Sejam  $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$  a esfera unitária bidimensional e  $N = (0, 0, 1) \in S^2$  o seu pólo norte. A projeção estereográfica  $\varphi : S^2 - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  expressa pela relação

$$x \mapsto \varphi(x) = \left( -\frac{x_1}{x_3 - 1}, -\frac{x_2}{x_3 - 1} \right), \text{ com } x = (x_1, x_2, x_3)$$

estabelece uma bijeção entre  $S^2 - \{N\}$  e o espaço euclidiano  $\mathbb{R}^2$ , cuja a inversa é dada pela aplicação  $\varphi^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 - \{N\}$  definida por

$$\varphi^{-1}(y) = \left( \frac{2y_1}{y_1^2 + y_2^2 + 1}, \frac{2y_2}{y_1^2 + y_2^2 + 1}, \frac{y_1^2 + y_2^2 - 1}{y_1^2 + y_2^2 + 1} \right), \text{ onde } y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Como  $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  é espaço vetorial e  $\varphi$  é uma bijeção, então pelo Teorema 2.2.2, podemos estabelecer em  $S^2 - \{N\}$  uma estrutura de espaço vetorial com as operações  $\oplus$  e  $\odot$  definidas da seguinte forma.

Dados  $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3) \in S^2 - \{N\}$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (u \oplus v) &= \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v)) \\ &= \varphi^{-1}\left(\left(-\frac{u_1}{u_3 - 1}, -\frac{u_2}{u_3 - 1}\right) + \left(-\frac{v_1}{v_3 - 1}, -\frac{v_2}{v_3 - 1}\right)\right) \\ &= \varphi^{-1}\left(\left(-\frac{u_1}{u_3 - 1} - \frac{v_1}{v_3 - 1}, -\frac{u_2}{u_3 - 1} - \frac{v_2}{v_3 - 1}\right)\right) \\ &= \varphi^{-1}\left(-\frac{u_1(v_3 - 1) + v_1(u_3 - 1)}{(u_3 - 1)(v_3 - 1)}, -\frac{u_2(v_3 - 1) + v_2(u_3 - 1)}{(u_3 - 1)(v_3 - 1)}\right) \\ &= \left(\frac{-2\alpha}{\alpha^2 + \beta^2 + 1}, \frac{-2\beta}{\alpha^2 + \beta^2 + 1}, \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 1}{\alpha^2 + \beta^2 + 1}\right), \end{aligned}$$

$$\text{com } \alpha = \frac{u_1(v_3 - 1) + v_1(u_3 - 1)}{(u_3 - 1)(v_3 - 1)} \text{ e } \beta = \frac{u_2(v_3 - 1) + v_2(u_3 - 1)}{(u_3 - 1)(v_3 - 1)}.$$

Se fizermos  $u \oplus v = (w_1, w_2, w_3)$ , então

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{-2(u_1(v_3 - 1) + v_1(u_3 - 1))(u_3 - 1)(v_3 - 1)}{(u_1(v_3 - 1) + v_1(u_3 - 1))^2 + (u_2(v_3 - 1) + v_2(u_3 - 1))^2 + ((u_3 - 1)(v_3 - 1))^2} \\ &= \frac{((-2(u_1(v_3 - 1) + v_1(u_3 - 1))(u_3 - 1)(v_3 - 1))[(u_1^2 + u_2^2)(v_3 - 1)^2 + 2(u_1v_1 + u_2v_2)(u_3 - 1)(v_3 - 1)(v_1^2 + v_2^2)(u_3 - 1)^2 + ((u_3 - 1)(v_3 - 1))^2]^{-1}}{((-2(u_1(v_3 - 1) + v_1(u_3 - 1))(u_3 - 1)(v_3 - 1))[(1 - u_3)^2(v_3 - 1)^2 + 2(u_1v_1 + u_2v_2)(u_3 - 1)(v_3 - 1) + (1 - v_3)^2(u_3 - 1)^2 + ((u_3 - 1)(v_3 - 1))^2]^{-1}} \\ &= \frac{-2(u_1(v_3 - 1) + v_1(u_3 - 1))}{(1 + u_3)(1 - v_3) + 2(u_1v_1 + u_2v_2) + (1 + v_3)(1 - u_3)((u_3 - 1)(v_3 - 1))} \\ &= \frac{(-2(u_1(v_3 - 1) + v_1(u_3 - 1)))}{(1 + u_3)(1 - v_3) + 2(u_1v_1 + u_2v_2) + 2(1 - u_3)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_2 &= \frac{-2(u_2(v_3 - 1) + v_2(u_3 - 1))(u_3 - 1)(v_3 - 1)}{(u_1(v_3 - 1) + v_1(u_3 - 1))^2 + (u_2(v_3 - 1) + v_2(u_3 - 1))^2 + ((u_3 - 1)(v_3 - 1))^2} \\
&= \frac{((-2(u_2(v_3 - 1) + v_2(u_3 - 1))(u_3 - 1)(v_3 - 1))[(u_1^2 + u_2^2)(v_3 - 1) + \\
&\quad 2(u_1v_1 + u_2v_2)(u_3 - 1)(v_3 - 1)(v_1^2 + v_2^2)(u_3 - 1)^2 + ((u_3 - 1)(v_3 - 1))^2]^{-1}}{((-2(u_2(v_3 - 1) + v_2(u_3 - 1))(u_3 - 1)(v_3 - 1))[(1 - u_3)^2(v_3 - 1)^2 + \\
&\quad 2(u_1v_1 + u_2v_2)(u_3 - 1)(v_3 - 1) + (1 - v_3)^2(u_3 - 1)^2 + ((u_3 - 1)(v_3 - 1))^2]^{-1}} \\
&= \frac{-2(u_2(v_3 - 1) + v_2(u_3 - 1))}{(1 + u_3)(1 - v_3) + 2(u_1v_1 + u_2v_2) + (1 + v_3)(1 - u_3)((u_3 - 1)(v_3 - 1))}, \\
&= \frac{-2(u_2(v_3 - 1) + v_2(u_3 - 1))}{(1 + u_3)(1 - v_3) + 2(u_1v_1 + u_2v_2) + 2(1 - u_3)}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
w_3 &= \frac{(u_1(v_3 - 1) + v_1(u_3 - 1))^2 + (u_2(v_3 - 1) + v_2(u_3 - 1))^2 - ((u_3 - 1)(v_3 - 1))^2}{(u_1(v_3 - 1) + v_1(u_3 - 1))^2 + (u_2(v_3 - 1) + v_2(u_3 - 1))^2 + ((u_3 - 1)(v_3 - 1))^2} \\
&= \frac{((u_1(v_3 - 1) + v_1(u_3 - 1))^2 + (u_2(v_3 - 1) + v_2(u_3 - 1))^2 - ((u_3 - 1)(v_3 - 1))^2)}{[(u_1(v_3 - 1) + v_1(u_3 - 1))^2 + (u_2(v_3 - 1) + v_2(u_3 - 1))^2 + ((u_3 - 1)(v_3 - 1))^2]^{-1}} \\
&= \frac{((u_1(v_3 - 1) + v_1(u_3 - 1))^2 + (u_2(v_3 - 1) + v_2(u_3 - 1))^2 - ((u_3 - 1)(v_3 - 1))^2)}{[(u_1(v_3 - 1) + v_1(u_3 - 1))^2 + (u_2(v_3 - 1) + v_2(u_3 - 1))^2 + ((u_3 - 1)(v_3 - 1))^2]^{-1}} \\
&= \frac{(u_1(v_3 - 1) + v_1(u_3 - 1))^2 + (u_2(v_3 - 1) + v_2(u_3 - 1))^2 - ((u_3 - 1)(v_3 - 1))^2}{(u_1(v_3 - 1) + v_1(u_3 - 1))^2 + (u_2(v_3 - 1) + v_2(u_3 - 1))^2 + ((u_3 - 1)(v_3 - 1))^2} \\
&= \frac{((u_1(v_3 - 1) + v_1(u_3 - 1))^2 + (u_2(v_3 - 1) + v_2(u_3 - 1))^2 - ((u_3 - 1)(v_3 - 1))^2)}{(u_1(v_3 - 1) + v_1(u_3 - 1))^2 + (u_2(v_3 - 1) + v_2(u_3 - 1))^2 + ((u_3 - 1)(v_3 - 1))^2}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
u \oplus v &= \left( \frac{-2(u_1(v_3 - 1) + v_1(u_3 - 1))}{(1 + u_3)(1 - v_3) + 2(u_1v_1 + u_2v_2) + 2(1 - u_3)}, \right. \\
&\quad \left. \frac{-2(u_2(v_3 - 1) + v_2(u_3 - 1))}{(1 + u_3)(1 - v_3) + 2(u_1v_1 + u_2v_2) + 2(1 - u_3)}, \right. \\
&\quad \left. \frac{(u_1(v_3 - 1) + v_1(u_3 - 1))^2 + (u_2(v_3 - 1) + v_2(u_3 - 1))^2 - ((u_3 - 1)(v_3 - 1))^2}{(u_1(v_3 - 1) + v_1(u_3 - 1))^2 + (u_2(v_3 - 1) + v_2(u_3 - 1))^2 + ((u_3 - 1)(v_3 - 1))^2} \right).
\end{aligned}$$

**A operação de multiplicação por escalar obtém-se fazendo**

$$\begin{aligned}
\lambda \odot u &= \varphi^{-1}(\lambda\varphi(u)) \\
&= \varphi^{-1}\left(\lambda\left(-\frac{u_1}{u_3 - 1}, -\frac{u_2}{u_3 - 1}\right)\right) \\
&= \varphi^{-1}\left(-\frac{\lambda u_1}{u_3 - 1}, -\frac{\lambda u_2}{u_3 - 1}\right) \\
&= \left(\frac{-\frac{2\lambda u_1}{u_3 - 1}}{\left(\frac{\lambda u_1}{(u_3 - 1)}\right)^2 + \left(\frac{\lambda u_2}{(u_3 - 1)}\right)^2 + 1}, \frac{-\frac{2\lambda u_2}{u_3 - 1}}{\left(\frac{\lambda u_1}{(u_3 - 1)}\right)^2 + \left(\frac{\lambda u_2}{(u_3 - 1)}\right)^2 + 1}, \right. \\
&\quad \left. \frac{\left(\frac{\lambda u_1}{(u_3 - 1)}\right)^2 + \left(\frac{\lambda u_2}{(u_3 - 1)}\right)^2 - 1}{\left(\frac{\lambda u_1}{(u_3 - 1)}\right)^2 + \left(\frac{\lambda u_2}{(u_3 - 1)}\right)^2 + 1}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{-2\lambda u_1}{(u_3 - 1)} \frac{(u_3 - 1)^2}{\lambda^2(u_1^2 + u_2^2) + (u_3 - 1)^2}, \frac{-2\lambda u_2}{(u_3 - 1)} \frac{(u_3 - 1)^2}{\lambda^2(u_1^2 + u_2^2) + (u_3 - 1)^2}, \right. \\
&\quad \left. \frac{\lambda^2(u_1^2 + u_2^2) - (u_3 - 1)^2}{\lambda^2(u_1^2 + u_2^2) + (u_3 - 1)^2} \right) \\
&= \left( \frac{-2\lambda u_1(u_3 - 1)}{\lambda^2(1 - u_3^2) + (u_3 - 1)^2}, \frac{-2\lambda u_2(u_3 - 1)}{\lambda^2(1 - u_3^2) + (u_3 - 1)^2}, \frac{\lambda^2(1 - u_3^2) - (u_3 - 1)^2}{\lambda^2(1 - u_3^2) + (u_3 - 1)^2} \right) \\
&= \left( \frac{-2\lambda u_1(u_3 - 1)}{-\lambda^2(u_3 - 1)(u_3 + 1) + (u_3 - 1)^2}, \frac{-2\lambda u_2(u_3 - 1)}{-\lambda^2(u_3 - 1)(u_3 + 1) + (u_3 - 1)^2}, \right. \\
&\quad \left. \frac{\lambda^2(1 - u_3^2) - (u_3 - 1)^2}{\lambda^2(1 - u_3^2) + (u_3 - 1)^2} \right) \\
&= \left( \frac{-2\lambda u_1}{-\lambda^2(u_3 + 1) + (u_3 - 1)}, \frac{-2\lambda u_2}{-\lambda^2(u_3 + 1) + (u_3 - 1)}, \frac{\lambda^2(1 - u_3^2) - (u_3 - 1)^2}{\lambda^2(1 - u_3^2) + (u_3 - 1)^2} \right).
\end{aligned}$$

Com as operações  $\oplus$  e  $\odot$  obtidas,  $(S^2 - \{N\}, \oplus, \odot)$  é um espaço vetorial.

O elemento neutro de  $S^2 - \{N\}$  é o elemento  $\varphi^{-1}(0) = (0, 0, -1)$  e o elemento oposto de  $u = (u_1, u_2, u_3)$  é definido por

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(-\varphi(u)) &= \varphi^{-1}(-\varphi(u_1, u_2, u_3)) \\
&= \varphi^{-1}\left(\frac{u_1}{u_3 - 1}, \frac{u_2}{u_3 - 1}\right) \\
&= \left( \frac{\frac{2u_1}{u_3 - 1}}{\left(\frac{u_1}{u_3 - 1}\right)^2 + \left(\frac{u_2}{u_3 - 1}\right)^2 + 1}, \frac{\frac{2u_2}{u_3 - 1}}{\left(\frac{u_1}{u_3 - 1}\right)^2 + \left(\frac{u_2}{u_3 - 1}\right)^2 + 1}, \frac{\left(\frac{u_1}{u_3 - 1}\right)^2 + \left(\frac{u_2}{u_3 - 1}\right)^2 - 1}{\left(\frac{u_1}{u_3 - 1}\right)^2 + \left(\frac{u_2}{u_3 - 1}\right)^2 + 1} \right) \\
&= \left( \frac{\frac{2u_1}{u_3 - 1}}{\frac{u_1^2 + u_2^2}{(u_3 - 1)^2} + 1}, \frac{\frac{2u_2}{u_3 - 1}}{\frac{u_1^2 + u_2^2}{(u_3 - 1)^2} + 1}, \frac{\frac{u_1^2 + u_2^2}{(u_3 - 1)^2} - 1}{\frac{u_1^2 + u_2^2}{(u_3 - 1)^2} + 1} \right) \\
&= \left( \frac{\frac{2u_1}{u_3 - 1}}{\frac{u_1^2 + u_2^2 + (u_3 - 1)^2}{(u_3 - 1)^2}}, \frac{\frac{2u_2}{u_3 - 1}}{\frac{u_1^2 + u_2^2 + (u_3 - 1)^2}{(u_3 - 1)^2}}, \frac{\frac{x_1^2 + u_2^2 - (u_3 - 1)^2}{(u_3 - 1)^2}}{\frac{x_1^2 + u_2^2 + (u_3 - 1)^2}{(u_3 - 1)^2}} \right) \\
&= \left( \frac{2u_1(u_3 - 1)}{x_1^2 + u_2^2 + (u_3 - 1)^2}, \frac{2u_2(u_3 - 1)}{x_1^2 + u_2^2 + (u_3 - 1)^2}, \frac{x_1^2 + u_2^2 - (u_3 - 1)^2}{x_1^2 + u_2^2 + (u_3 - 1)^2} \right) \\
&= \left( \frac{2u_1(u_3 - 1)}{-2u_3 + 2}, \frac{2u_2(u_3 - 1)}{-2u_3 + 2}, \frac{-2u_3^2 + 2u_3}{-2u_3 + 2} \right) \\
&= (-u_1, -u_2, u_3)
\end{aligned}$$

Inspirados pelo trabalho de Lopes (2018), Rufino e Naveca (2021) apresentaram o seguinte resultado, o qual mostra como modificar a estrutura de um espaço vetorial do tipo gráfico.

**Teorema 2.2.3.** *Sejam  $(E, +, \cdot)$  um espaço vetorial,  $f : E \rightarrow X$  uma aplicação e  $\varphi : E \rightarrow E$  uma bijeção. Então, o conjunto*

$$W = G(f) = \{(v, f(v)); v \in E\}$$

*possui uma estrutura de espaço vetorial com as operações de adição e multiplicação por escalar definidas por:*

$$\begin{aligned} (u, f(u)) \oplus (v, f(v)) &= (\varphi(\varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(v)), f(\varphi(\varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(v)))) \\ \lambda \odot (u, f(u)) &= (\varphi(\lambda\varphi^{-1}(u)), f(\varphi(\lambda\varphi^{-1}(u)))) \end{aligned}$$

Como podemos ver nos Teoremas 2.2.2 e 2.2.3, as bijeções podem induzir operações de espaço vetorial em conjuntos específicos. A seguinte proposição, apresentada por Rufino e Naveca, mostra como bijeções podem induzir um produto interno e consequentemente uma noção de ângulo entre vetores em tais conjuntos. Com o produto interno definido, é possível estabelecer uma norma. Para mais detalhes o leitor pode consultar Rufino e Naveca (2021).

**Proposição 2.2.1.** *Dado um espaço vetorial finito dimensional  $(E, \oplus, \cdot)$  com produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e  $X$  um conjunto não-vazio. Se  $\varphi : E \rightarrow X$  é uma bijeção então, define-se um produto interno em  $X$  pondo-se:*

$$\langle u, v \rangle_X = \langle \varphi^{-1}(u), \varphi^{-1}(v) \rangle \text{ para } u, v \in X \quad (2.1)$$

*Além disso, esse produto interno induz em  $X$  a norma*

$$\|u\|_X = \sqrt{\langle u, u \rangle_X} \quad (2.2)$$

*Essa norma induz uma métrica em  $X$  pondo-se, para  $u, v \in X$ ,*

$$d_X(u, v) = \|u - v\|_X. \quad (2.3)$$

## 2.3 RETAS EM ESPAÇOS VETORIAIS

Nesta subseção estudaremos o conceito de reta em espaços vetoriais. Para mais detalhes sugerimos ao leitor consultar Lima (2018) e Rufino e Naveca (2021). Temos a seguinte definição para retas em espaços vetoriais.

**Definição 2.3.1.** Em um espaço vetorial  $(E, +, \cdot)$ , a reta  $r$  que contém os vetores  $u$  e  $v$  de  $E$  é, por definição, o subconjunto

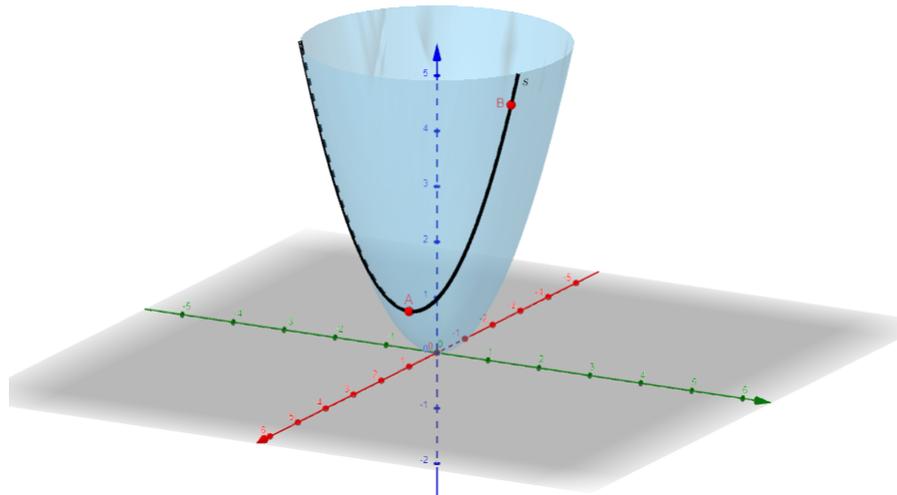
$$r = \{(1 - t) \cdot u + t \cdot v; t \in \mathbb{R}\} \subset E.$$

**Exemplo 2.3.1.** Seja  $V = \{(x, y, x^2 + y^2); x, y \in \mathbb{R}\}$  o parabolóide do Exemplo 2.2.1. Sejam os pontos  $A = (1, 0, 1)$  e  $B = (1, 2, 5)$  pertencentes  $V$ . A reta  $s$  que contém os pontos  $A$  e  $B$  é dada por

$$\begin{aligned} s &= \{(1 - x) \odot (1, 0, 1) \oplus x \odot (1, 2, 5); x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(1 - x, 0, (1 - x)^2) \oplus (x, 2x, 5x^2); x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(1, 2x, 4x^2 + 1); x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

A Figura 7 mostra uma representação geométrica da reta  $s$ .

Figura 7 – Reta  $s$



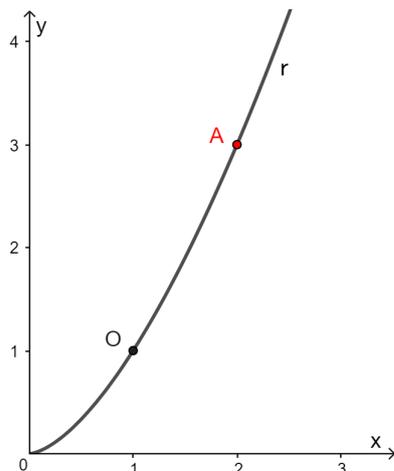
Fonte: Autor

**Exemplo 2.3.2.** Sejam  $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$  o espaço vetorial do Exemplo 2.2.3 e  $A = (2, 3) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ . A reta  $r$  que passa pela origem de  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  e por  $A$  é dada por

$$\begin{aligned} r &= \{(1 - x) \odot (1, 1) \oplus x \odot (2, 3); x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(1, 1) \oplus (2^x, 3^x); x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(2^x, 3^x); x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

A Figura 8 mostra uma representação geométrica da reta  $r$ .

Figura 8 – Reta  $r$



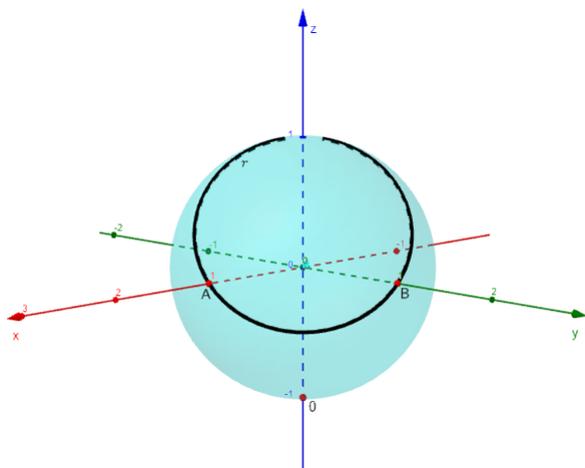
Fonte: Autor

**Exemplo 2.3.3.** *Sejam  $(S^2 - \{N\}, \oplus, \odot)$  o espaço vetorial do Exemplo 2.2.4 e  $A = (1, 0, 0)$  e  $B = (0, 1, 0)$  pertencentes a  $(S^2 - \{N\}, \oplus, \odot)$ . A reta  $r$  que passa pelos pontos  $A$  e  $B$  é dada por*

$$\begin{aligned} r &= \{(1 - x) \odot (1, 0, 0) \oplus x \odot (0, 1, 0); x \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{ \left( \frac{2(x - 1)}{-x^2 + 2x - 2}, 0, \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 2x + 2} \right) \oplus \left( 0, \frac{2x}{x^2 + 1}, \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right); x \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \left( \frac{-x + 1}{x^2 - x + 1}, \frac{x}{x^2 - x + 1}, \frac{x^2 - x}{x^2 - x + 1} \right); x \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

A Figura 9 mostra uma representação geométrica da reta  $r$ .

Figura 9 – Reta  $r$  passando pelos pontos  $A$  e  $B$ .



Fonte: Autor

Observe que a reta se aproxima indefinidamente do polo norte.

## 2.4 TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Nesta subseção apresentaremos a definição de transformação linear, exemplos e resultados que são importantes para a compreensão do nosso estudo. Destacamos que o estudo de transformações lineares é o principal objetivo do nosso trabalho.

**Definição 2.4.1.** *Sejam  $(V, +, \cdot)$  e  $(W, \oplus, \odot)$  espaços vetoriais. Uma aplicação  $T : V \rightarrow W$  é dita uma transformação linear de  $V$  em  $W$  se, para quaisquer  $u, v \in V$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , são satisfeitas as seguintes condições:*

$$i) T(u + v) = T(u) \oplus T(v)$$

$$ii) T(\alpha \cdot u) = \alpha \odot T(u).$$

A seguir apresentamos algumas transformações lineares clássicas no espaço  $\mathbb{R}^2$  canônico.

**Exemplo 2.4.1.** *Seja  $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  o espaço vetorial do Exemplo 1. A aplicação  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $T(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$  é uma transformação linear.*

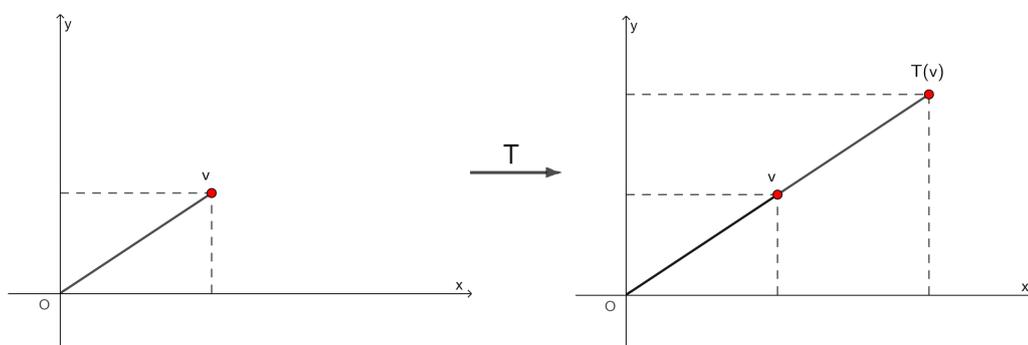
Observe que

$$\|T(x, y)\| = \|(\alpha x, \alpha y)\| = \sqrt{\alpha^2 x^2 + \alpha^2 y^2} = |\alpha| \sqrt{x^2 + y^2} = |\alpha| \|(x, y)\|.$$

Assim:

*Se  $|\alpha| > 1$  então  $|\alpha| \|(x, y)\| > \|(x, y)\|$ . Neste caso dizemos que  $T$  dilata o vetor  $(x, y)$ . A Figura 10 mostra uma situação em que  $\alpha = 2$ .*

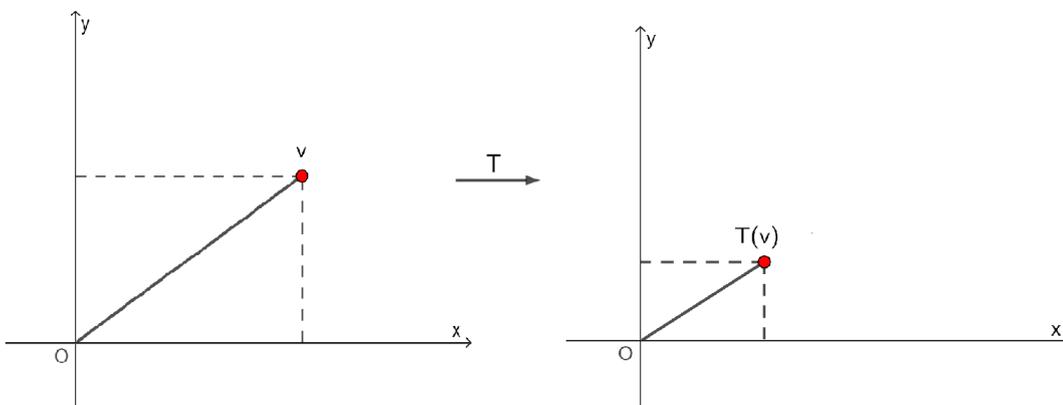
Figura 10 – Dilatação do vetor



Fonte: Autor

Se  $|\alpha| < 1$ , então  $|\alpha| \|(x, y)\| < \|(x, y)\|$ . Neste caso dizemos que  $T$  contrai o vetor  $(x, y)$ . Veja a Figura 11.

Figura 11 – Contração do vetor



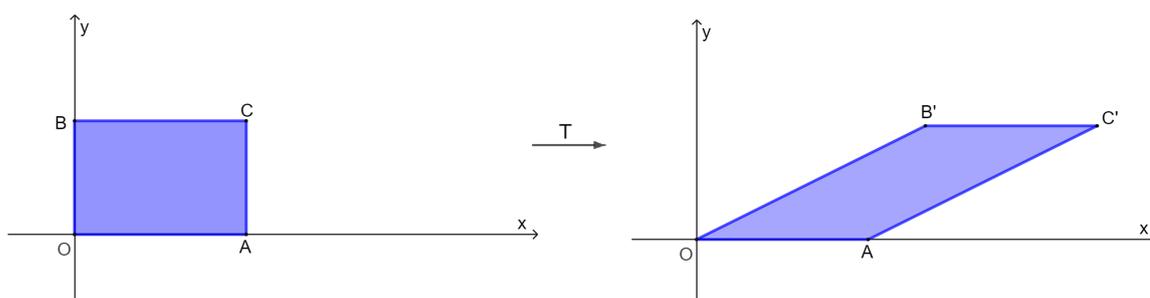
Fonte: Autor

Se  $\alpha = 1$ ,  $T$  é a transformação identidade;

Se  $\alpha < 0$ ,  $T$  troca o sentido do vetor, dilatando se  $|\alpha| > 1$  ou contraindo se  $|\alpha| < 1$ .

**Exemplo 2.4.2.** Seja  $(\mathbb{R}^2, +, \odot)$  o espaço vetorial do Exemplo 1. A aplicação  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $T(x, y) = (x + \alpha y, y)$  é uma transformação linear. Esta transformação é chamada de cisalhamento na direção  $x$ . A Figura 12 mostra a ação de  $T$  no retângulo  $OACB$  no caso em que  $\alpha = 2$ .

Figura 12 – Cisalhamento

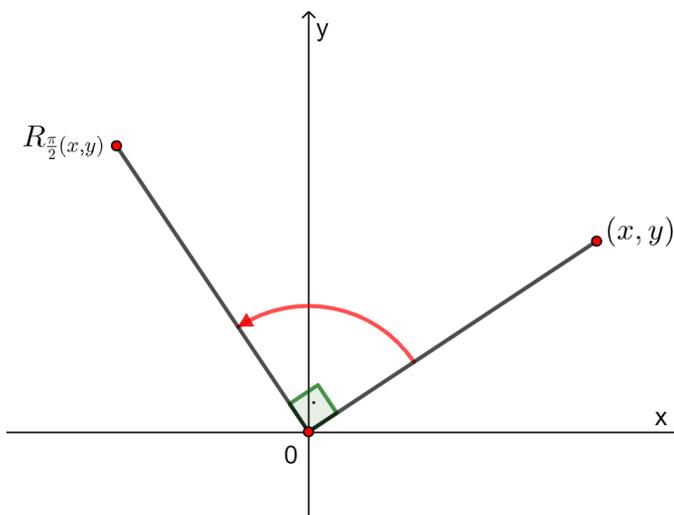


Fonte: Autor

Observe que o cisalhamento preserva a área de  $OABC$ .

**Exemplo 2.4.3.** Seja  $(\mathbb{R}^2, +, \odot)$  o espaço vetorial do Exemplo 1. A aplicação  $R_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $R_\theta(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$  é uma transformação linear. Esta transformação é chamada de rotação em torno da origem no sentido anti-horário. A Figura 13 mostra a ação de  $R_\theta$  para o caso em que  $\theta = \frac{\pi}{2}$

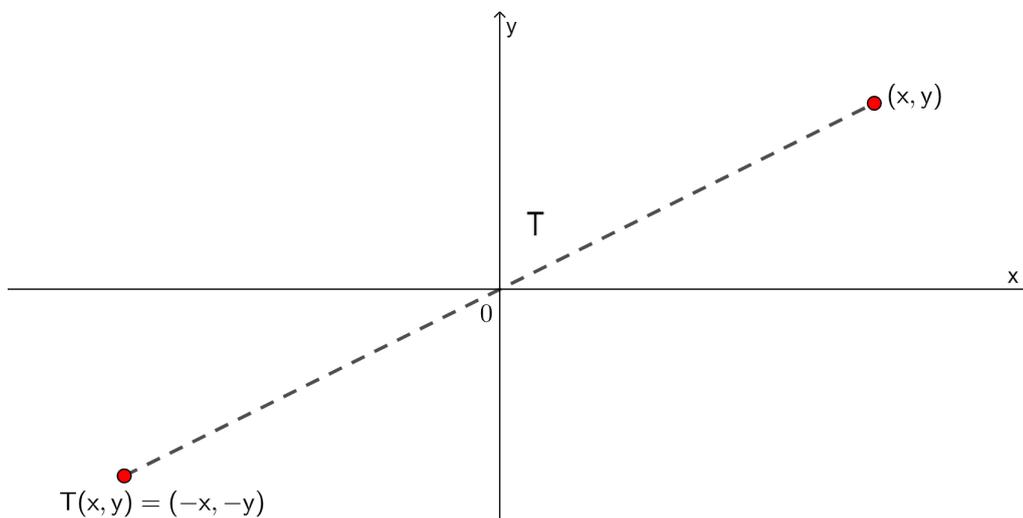
Figura 13 – Rotação em torno da origem.



Fonte: Autor

**Exemplo 2.4.4.** A aplicação  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $T(x, y) = (-x, -y)$  é uma transformação linear. Esta transformação linear representa a reflexão em torno da origem. A Figura 14 mostra a ação de  $T$ .

Figura 14 – Reflexão em torno origem



Fonte: Autor

### 2.4.1 Núcleo e imagem de uma transformação linear

A seguir apresentaremos as definições de núcleo e imagem de uma transformação linear, além do Teorema da dimensão. Para mais detalhes o leitor pode consultar Steinbruch e Winterle (1987) e Lima (2018). Esses conceitos nos ajudarão a estabelecer uma relação entre o núcleo e a imagem das transformações nos espaços vetoriais

iniciais com o núcleo e a imagem das transformações nas novas estruturas de espaços vetoriais.

**Definição 2.4.2.** Chama-se núcleo de uma transformação linear  $T : V \rightarrow W$  ao conjunto de todos os vetores  $v \in V$  que são transformados em  $0 \in W$ . Indica-se esse conjunto por  $N(T)$ . Em notação matemática

$$N(T) = \{v \in V / T(v) = 0\}.$$

Observe que  $N(T) \subset V$  e  $N(T) \neq \emptyset$ , pois  $0 \in N(T)$ .

**Exemplo 2.4.5.** O núcleo da transformação linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida por  $T(x, y) = (2x + 4y, x + 2y)$  é o conjunto

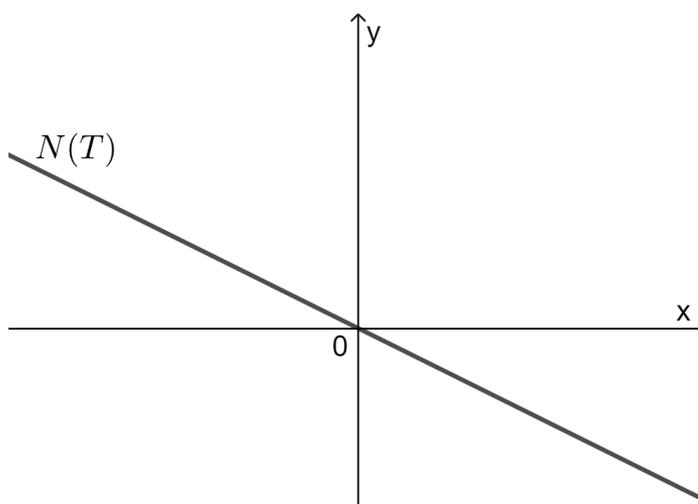
$$N(T) = \{(-2y, y) / y \in \mathbb{R}\}.$$

Veja que

$$T(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (2x + 4y, x + 2y) = (0, 0).$$

Logo, devemos ter  $\begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$  Resolvendo este sistema, obtemos  $x = -2y$ . Isso prova nossa afirmação. Veja que esse conjunto representa uma reta de  $\mathbb{R}^2$  que passa pela sua origem. A Figura 15 mostra a representação geométrica de  $N(T)$ .

Figura 15 – Representação de  $N(T)$



Fonte: Autor

**Definição 2.4.3.** Chama-se imagem de uma transformação linear  $T : V \rightarrow W$  ao conjunto de todos os vetores  $w \in W$  que são imagens de pelo menos um vetor  $v \in V$ . Indica-se esse conjunto por  $Im(T)$ . Em notação matemática,

$$\text{Im}(T) = \{w \in W / T(v) = w \text{ para algum } v \in V\}.$$

Note que  $\text{Im}(T) \subset W$  e  $\text{Im}(T) \neq \emptyset$ , pois  $0 = T(0) \in \text{Im}(T)$ .

Se  $\text{Im}(T) = W$ ,  $T$  diz-se sobrejetora, isto é, para todo  $w \in W$  existe pelo menos um  $v \in V$  tal que  $T(v) = w$ .

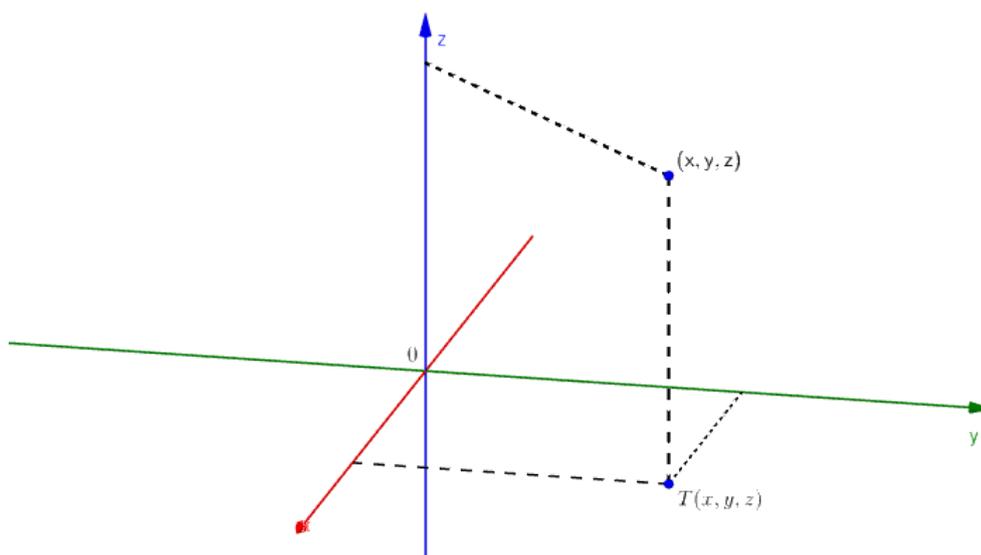
O seguinte exemplo pode ser visto em Steinbruch e Winterle (1987).

**Exemplo 2.4.6.** Seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, T(x, y, z) = (x, y, 0)$  a projeção ortogonal do  $\mathbb{R}^3$  sobre  $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ . A imagem de  $T$  definida por:

$$\text{Im}(T) = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 / x, y \in \mathbb{R}\}.$$

A Figura 16 mostra os pontos  $(x, y, z)$  e  $T(x, y, z)$ .

Figura 16 – Representação de  $\text{Im}(T)$ .



Fonte: Autor

O Teorema da dimensão ou Teorema do núcleo e da imagem é um resultado clássico da álgebra linear, o qual apresentaremos a seguir. Para uma demonstração do Teorema, o leitor pode consultar Lima (2018).

**Teorema 2.4.1.** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais de dimensão finita e  $T : V \rightarrow W$  uma transformação linear. Então,  $\dim(N(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = \dim V$ .

A seguinte proposição nos mostra que uma transformação linear transforma retas do espaço vetorial de saída em retas do espaço vetorial de chegada.

**Proposição 2.4.1.** *Sejam  $(E, +, \cdot)$  e  $(V, \oplus, \odot)$  espaços vetoriais. Uma transformação linear  $T : E \rightarrow V$  transforma uma reta  $r$  de  $E$  em uma reta  $T(r)$  em  $V$ .*

*Demonstração.* Seja  $r$  a reta de  $E$  que passa pelos vetores  $u$  e  $v$ . Então  $r$  é definida por  $\{(1-t)u + tv; t \in \mathbb{R}\}$ . Assim,

$$T((1-t)u + tv) = T((1-t)u) \oplus T(tv) = (1-t) \odot T(u) \oplus t \odot T(v).$$

Logo,  $T$  transforma a reta que passa pelos vetores  $u$  e  $v$  de  $E$  na reta que passa pelos vetores  $T(u)$  e  $T(v)$  de  $V$ . □

### 3 TRANSFORMAÇÕES LINEARES EM NOVAS ESTRUTURAS

Nesta seção apresentaremos os resultados relativos às transformações lineares em novas estruturas de espaços vetoriais, objetivo principal do nosso trabalho.

Como ponto de partida, estudaremos as transformações lineares nos espaços vetoriais do tipo gráfico, mencionados da Seção 2.2.

#### 3.1 TRANSFORMAÇÕES LINEARES EM ESPAÇOS VETORIAIS DO TIPO GRÁFICO

O principal resultado desta seção é devido a Rufino (2022), o qual mostra como construir transformações lineares em espaços vetoriais do tipo gráfico.

**Teorema 3.1.1** (Rufino). *Sejam  $(E, +, \cdot)$  um espaço vetorial,  $L : E \rightarrow E$  uma transformação linear,  $F : E \rightarrow X$  uma aplicação e  $G(F) = \{(u, F(u)), u \in E\}$  o gráfico de  $F$  com as operações definidas por*

$$\begin{aligned}(u, F(u)) \oplus (v, F(v)) &= (u + v, F(u + v)) \\ \lambda \odot (u, F(u)) &= (\lambda u, F(\lambda u)).\end{aligned}$$

*Então, a aplicação  $T : G(F) \rightarrow G(F)$  definida por  $T(u, F(u)) = (L(u), F(L(u)))$  é uma transformação linear.*

*Demonstração.* Sejam  $u = (u, F(u)), v = (v, F(v)) \in G(F)$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Temos que:

i)

$$\begin{aligned}T(u \oplus v) &= T((u, F(u)) \oplus (v, F(v))) \\ &= T((u + v), F(u + v)) \\ &= (L(u + v), F(L(u + v))) \\ &= (L(u) + L(v), F(L(u) + L(v))) \\ &= (L(u), F(L(u)) \oplus (L(v), F(L(v)))) \\ &= T(u) \oplus T(v).\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
T(\lambda \odot u) &= T(\lambda \odot (u, F(u))) \\
&= T(\lambda \cdot u, F(\lambda \cdot u)) \\
&= (L(\lambda \cdot u), F(L(\lambda \cdot u))) \\
&= (\lambda \cdot L(u), F(\lambda \cdot L(u))) \\
&= \lambda \odot (L(u), F(L(u))) \\
&= \lambda \odot T((u), F(u)) \\
&= \lambda \odot T(u).
\end{aligned}$$

□

A seguir, apresentaremos algumas situações específicas.

### 3.1.1 Transformações lineares no parabolóide

Nosso primeiro exemplo será construído no parabolóide do Exemplo 2.2.1.

Seja  $V = \{(x, y, x^2 + y^2); x, y \in \mathbb{R}\}$  o parabolóide com a estrutura de espaço vetorial dada pelas operações

$$\begin{aligned}
(x, y, x^2 + y^2) \oplus (z, w, z^2 + w^2) &= (x + z, y + w, (x + z)^2 + (y + w)^2) \\
\lambda \odot (x, y, x^2 + y^2) &= ((\lambda \cdot x, \lambda \cdot y, \lambda^2(x^2 + y^2))).
\end{aligned}$$

Note que  $V$  é o gráfico da aplicação  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = x^2 + y^2$ . As transformações lineares  $L : (\mathbb{R}^2, +, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  são da forma

$$L(x, y) = (ax + by, cx + dy),$$

onde  $a, b, c$  e  $d$  são números reais. Assim, segue do Teorema 3.1.1 que a aplicação  $T : V \rightarrow V$  definida por

$$T(x, y, x^2 + y^2) = (L(u), f(L(u))) = (ax + by, cx + dy, (ax + by)^2 + (cx + dy)^2),$$

com  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , é uma transformação linear em  $G(f)$ .

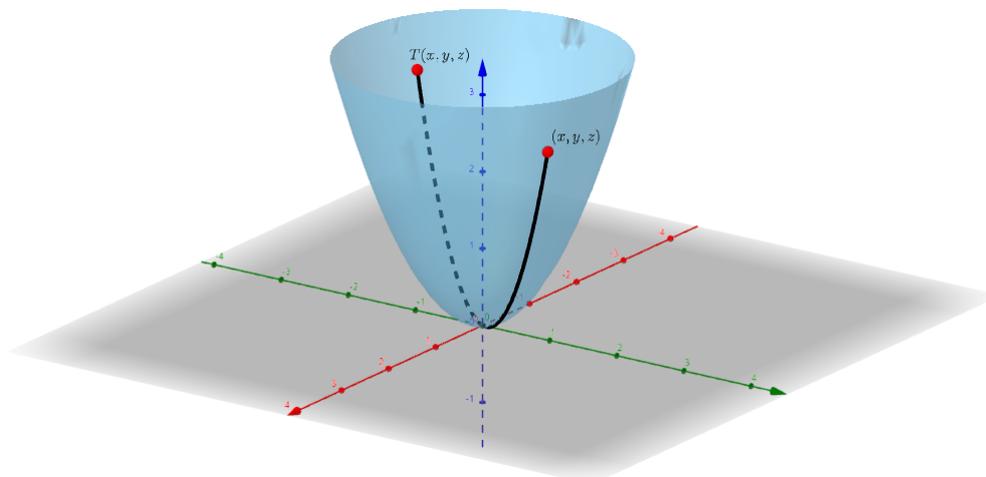
A seguir, vamos explorar alguns casos particulares.

**Exemplo 3.1.1.** Se  $L : (\mathbb{R}^2, +, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  for dada por  $L(x, y) = (-x, -y)$ , com  $a = d = -1$  e  $b = c = 0$ , obtemos a transformação linear  $T : V \rightarrow V$  definida por

$$T(x, y, x^2 + y^2) = (-x, -y, x^2 + y^2).$$

Esta transformação linear é a simetria em relação à origem  $(0, 0, 0)$  do parabolóide. A Figura 17 mostra o ponto  $(x, y, z)$  e sua imagem  $T(x, y, z)$ .

Figura 17 – O ponto  $(x, y, z)$  e seu simétrico  $T(x, y, z)$  em relação à origem no parabolóide.



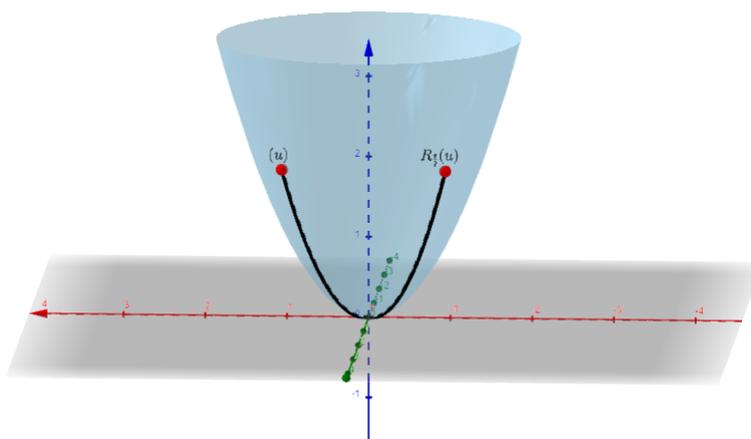
Fonte: Autor

**Exemplo 3.1.2.** Consideremos a transformação linear do espaço vetorial  $(V, \oplus, \odot)$  para o caso em que  $a = d = 0$  e  $b = -c = -1$ . Desse modo, obtemos a rotação

$$R_{\frac{\pi}{2}}(x, y, x^2 + y^2) = (-y, x, y^2 + x^2),$$

visto que foi utilizada a rotação  $L(x, y) = (-y, x)$  do espaço  $\mathbb{R}^2$  canônico. A Figura 18 mostra os pontos  $u = (1, 1, 2)$  e  $T(u) = (-1, 1, 2)$ .

Figura 18 – Ponto  $u$  e sua imagem obtida através da rotação  $\frac{\pi}{2}$ .



Fonte: Autor

### 3.1.2 Transformações lineares no espaço vetorial do Exemplo 4

Seja  $W = \{(x, y, e^{x+y})/x, y \in \mathbb{R}\}$  o espaço vetorial do Exemplo 4. Note que  $W$  é o gráfico da aplicação  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = e^{x+y}$ , conforme mencionado

no Exemplo 2.2.1. As transformações lineares  $L : (\mathbb{R}^2, +, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  são da forma

$$L(x, y) = (ax + by, cx + dy),$$

onde  $a, b, c$  e  $d$  são números reais. Assim, segue do Teorema 3.1.1 que a aplicação  $T : W \longrightarrow W$  definida por

$$\begin{aligned} T(x, y, e^{x+y}) &= (L(u), f(L(u))) \\ &= (ax + by, cx + dy, e^{(ax+by)+(cx+dy)}), \end{aligned}$$

com  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , é uma transformação linear em  $W = G(f)$ .

A seguir, veremos alguns casos particulares.

**Exemplo 3.1.3.** Se  $L : (\mathbb{R}^2, +, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  for dada por  $L(x, y) = (-x, -y)$ , com  $a = d = -1$  e  $b = c = 0$ , obtemos a transformação linear  $T : V \longrightarrow V$  definida por

$$T(x, y, e^{x+y}) = (-x, -y, e^{-(x+y)}).$$

*Esta transformação linear é a simetria em relação à origem  $(0, 0, 1)$  do Espaço Vetorial. Dessa maneira, a distância de  $(x, y, e^{x+y}) \in (W, \oplus, \odot)$  até a origem é a mesma distância de  $(-x, -y, e^{-(x+y)})$  até a origem. Para a prova deste fato, definiremos uma métrica adequada em  $G(f)$ . Consideremos a bijeção  $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow G(f)$  definida por*

$$\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y)),$$

*cuja a inversa  $\varphi^{-1} : G(f) \longrightarrow \mathbb{R}^2$  é a projeção no primeiro fator. Pela Proposição 2.2.1, define-se um produto interno em  $G(f)$  da seguinte forma:*

*Sejam  $(x, y, e^{x+y}), (z, w, e^{z+w}) \in G(f)$ . Temos que:*

$$\begin{aligned} \langle (x, y, e^{x+y}), (z, w, e^{z+w}) \rangle_{G(f)} &= \langle \varphi^{-1}(x, y, e^{x+y}), \varphi^{-1}(z, w, e^{z+w}) \rangle \\ &= \langle (x, y), (z, w) \rangle \\ &= xz + yw. \end{aligned}$$

*Além disso, esse produto interno induz em  $G(f)$  a norma*

$$\begin{aligned} \|(x, y, e^{x+y})\|_{G(f)} &= \sqrt{\langle (x, y, e^{x+y}), (x, y, e^{x+y}) \rangle_{G(f)}} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

*Essa norma induz uma métrica em  $G(F)$  pondo-se, para  $(x, y, e^{x+y}), (z, w, e^{z+w}) \in G(f)$ ,*

$$\begin{aligned} d_{G(f)}((x, y, e^{x+y}), (z, w, e^{z+w})) &= \|(x, y, e^{x+y}) \oplus (-z, -w, e^{-(z+w)})\|_{G(f)} \\ &= \|(x - z, y - w, e^{(x-z)+(y-w)})\|_{G(f)} \\ &= \sqrt{(x - z)^2 + (y - w)^2}. \end{aligned}$$

Com isso temos que a distância da origem  $(0,0,1)$  até um ponto  $(x, y, e^{x+y}) \neq (0,0,1)$  é dada por

$$d_{G(f)}((0,0,-1), (x, y, e^{x+y})) = \|(x, y, e^{x+y})\|_{G(f)} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

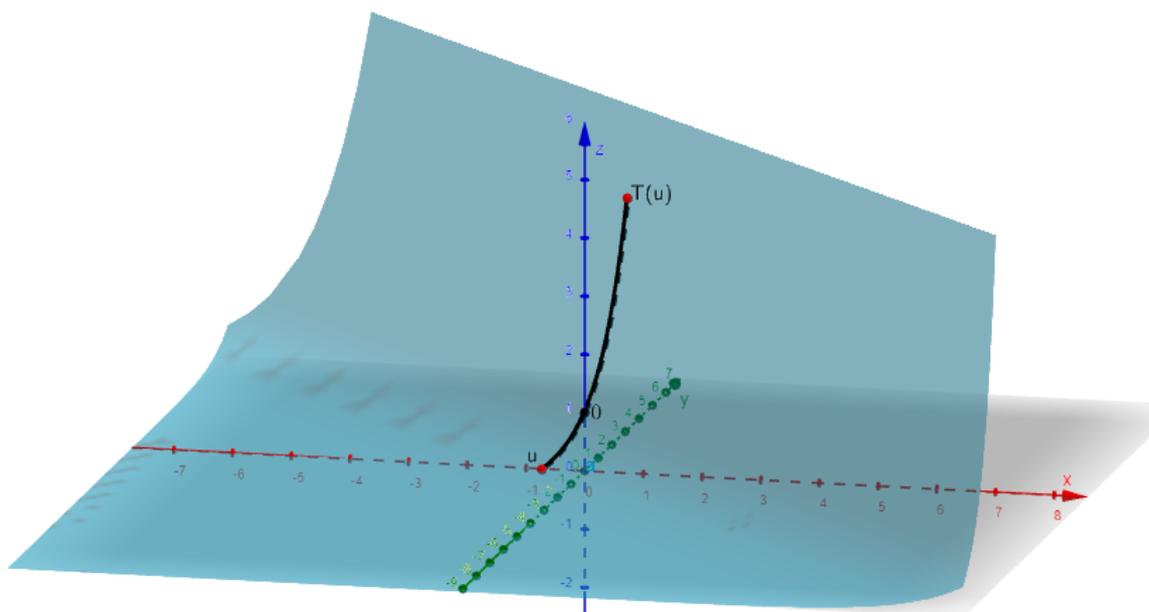
Também temos que a distância da origem  $(0,0,1)$  até  $T(x, y, e^{x+y}) = (-x, -y, e^{-(x+y)})$  é dada por

$$d_{G(f)}((0,0,-1), (-x, -y, e^{-(x+y)})) = \|(-x, -y, e^{-(x+y)})\|_{G(f)} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Portanto,  $d_{G(f)}((0,0,-1), (x, y, e^{x+y})) = d_{G(f)}((0,0,-1), T(x, y, e^{x+y}))$ .

A Figura 19 mostra os pontos  $u = (-\frac{1}{2}, -1, e^{-\frac{3}{2}})$  e  $T(u) = (\frac{1}{2}, 1, e^{\frac{3}{2}})$ .

Figura 19 – Ponto  $u$  e seu simétrico em relação a origem.



Fonte: Autor

No próximo exemplo veremos transformações que determinam rotações em torno da origem de  $(G(f), \oplus, \odot)$ .

**Exemplo 3.1.4.** Se considerarmos  $a = d = 0$  e  $b = -c = -1$  obtemos a transformação

$$R_{\frac{\pi}{2}} = (-y, x, e^{-y+x}),$$

que é uma rotação de  $\frac{\pi}{2}$  no sentido anti-horário. Se  $a = d = -1$  e  $b = c = 0$ , obtemos a transformação

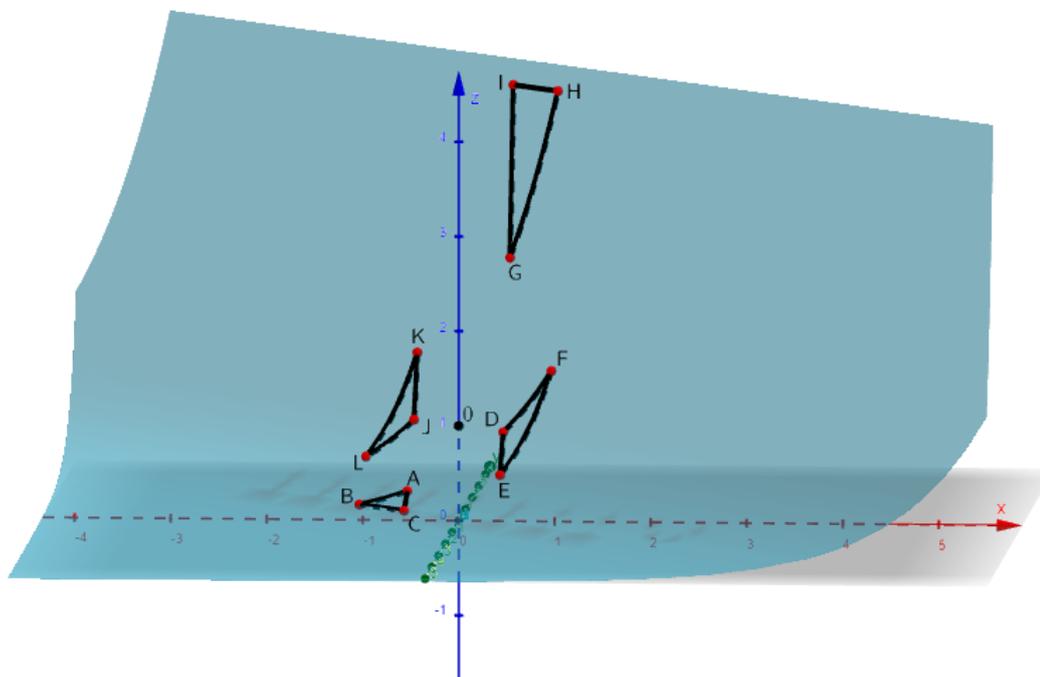
$$R_{\pi} = (-x, -y, e^{-(x+y)}),$$

que determina uma rotação  $\pi$  no sentido anti-horário. Por fim, se considerarmos  $a = d = 0$  e  $b = -c = 1$ , obtemos a transformação

$$R_{\frac{3\pi}{2}} = (y, -x, e^{y-x}),$$

que determina uma rotação  $\frac{3\pi}{2}$  no sentido anti-horário. A Figura 20 mostra o triângulo  $ABC$  com  $A = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, e^{-1})$ ,  $B = (-1, -\frac{1}{2}, e^{-\frac{3}{2}})$  e  $C = (-\frac{1}{2}, -1, e^{-\frac{3}{2}})$ . Se aplicarmos a transformação  $R_{\frac{\pi}{2}}$  nos vértices triângulo  $ABC$ , obtemos o triângulo  $DEF$ , onde  $R_{\frac{\pi}{2}}(A) = D$ ,  $R_{\frac{\pi}{2}}(B) = E$  e  $R_{\frac{\pi}{2}}(C) = F$ . Agora aplicando a transformação  $R_{\pi}$  no triângulo  $ABC$ , obtemos o triângulo  $GHI$ , onde  $R_{\pi}(A) = G$ ,  $R_{\pi}(B) = H$  e  $R_{\pi}(C) = I$ . Por fim, aplicando a transformação  $R_{\frac{3\pi}{2}}$  no triângulo  $ABC$  obtemos o triângulo  $JKL$ , com  $R_{\frac{3\pi}{2}}(A) = J$ ,  $R_{\frac{3\pi}{2}}(B) = K$  e  $R_{\frac{3\pi}{2}}(C) = L$ .

Figura 20 – Rotação em torno da origem aplicada no triângulo  $ABC$ .



Fonte: Autor

Note que os triângulos apresentados na Figura anterior são congruentes, pois cada um é obtido por meio de uma rotação do triângulo  $ABC$ , isso pode ser difícil de notar no ponto de vista euclidiano. Para comprovar este fato, calcularemos os lados dos triângulos  $ABC$  e  $GHI$  e mostraremos que os respectivos lados são congruentes. Pela métrica definida em  $G(f)$  temos que

$$\begin{aligned} d_{G(f)}(A, B) &= d_{G(f)}\left(\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, e^{-1}\right), \left(-1, -\frac{1}{2}, e^{-\frac{3}{2}}\right)\right) \\ &= \sqrt{\left(-\frac{1}{2} + 1\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{G(f)}(A, C) &= d_{G(f)}\left(\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, e^{-1}\right), \left(-\frac{1}{2}, -1, e^{-\frac{3}{2}}\right)\right) \\ &= \sqrt{\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} + 1\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{G(f)}(B, C) &= d_{G(f)}\left(\left(-1, -\frac{1}{2}, e^{-\frac{3}{2}}\right), \left(-\frac{1}{2}, -1, e^{-\frac{3}{2}}\right)\right) \\ &= \sqrt{\left(-1 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} + 1\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Agora calcularemos a medida dos lados do triângulo  $GHI$ . Temos que

$$\begin{aligned} d_{G(f)}(G, H) &= d_{G(f)}\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, e\right), \left(1, \frac{1}{2}, e^{\frac{3}{2}}\right)\right) \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{G(f)}(G, I) &= d_{G(f)}\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, e\right), \left(\frac{1}{2}, 1, e^{\frac{3}{2}}\right)\right) \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{G(f)}(H, I) &= d_{G(f)}\left(\left(1, \frac{1}{2}, e^{\frac{3}{2}}\right), \left(\frac{1}{2}, 1, e^{\frac{3}{2}}\right)\right) \\ &= \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Dessa maneira, concluímos que  $d_{G(f)}(A, B) = d_{G(f)}(G, H)$ ,  $d_{G(f)}(A, C) = d_{G(f)}(G, I)$ , e  $d_{G(f)}(B, C) = d_{G(f)}(H, I)$ . Portanto, os triângulos  $ABC$  e  $GHI$  são congruentes. Analogamente, mostra-se que os triângulos  $ABC$ ,  $DEF$  e  $JKL$  congruentes.

Também vale destacar que cada triângulo pode ser obtido a partir de outro com uma rotação adequada. Devido a Proposição 2.4.1, somente foi necessário calcular as imagens  $R_\theta(A)$ ,  $R_\theta(B)$ ,  $R_\theta(C)$  dos vértices do triângulo  $ABC$ , pela rotação adequada.

## 3.2 TRANSFORMAÇÕES LINEARES EM ESPAÇOS CONSTRUÍDOS VIA BIJEÇÕES

Nesta seção vamos estudar as transformações lineares nos espaços vetoriais construídos via bijeções.

O seguinte teorema foi apresentado em Rufino (2022).

**Teorema 3.2.1.** *Sejam  $E = (E, +, \cdot)$  um espaço vetorial e  $F = (F, \oplus, \odot)$  o espaço vetorial com a estrutura definida por uma bijeção  $\varphi : E \rightarrow F$ . Se  $L : E \rightarrow E$  é uma transformação linear, então  $T : F \rightarrow F$  definida por*

$$T = \varphi \circ L \circ \varphi^{-1}$$

*é uma transformação linear. Reciprocamente, se  $T : F \rightarrow F$  é uma transformação linear, então  $L : E \rightarrow E$  definida por*

$$L = \varphi^{-1} \circ T \circ \varphi$$

*é uma transformação linear.*

*Demonstração.* Sejam  $u, v \in F$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Temos que

i)

$$\begin{aligned} T(u \oplus v) &= \varphi(L(\varphi^{-1}(u \oplus v))) \\ &= \varphi(L(\varphi^{-1}(\varphi(\varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(v)))))) \\ &= \varphi(L(\varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(v))) \\ &= \varphi(L(\varphi^{-1}(u)) + L(\varphi^{-1}(v))) \\ &= \varphi(\varphi^{-1}(\varphi(L(\varphi^{-1}(u)))) + (\varphi^{-1}(\varphi(L(\varphi^{-1}(v)))))) \\ &= \varphi(\varphi^{-1}(T(u)) + \varphi^{-1}(T(v))) \\ &= T(u) \oplus T(v) \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} T(\lambda \odot u) &= \varphi(L(\varphi^{-1}(\lambda \odot u))) \\ &= \varphi(L(\varphi^{-1}(\varphi(\lambda \varphi^{-1}(u)))))) \\ &= \varphi(L(\lambda \varphi^{-1}(u))) \\ &= \varphi(\lambda L(\varphi^{-1}(u))) \\ &= \varphi(\lambda \varphi^{-1}(\varphi(L(\varphi^{-1}(u)))))) \\ &= \varphi(\lambda \varphi^{-1}(T(u))) \\ &= \lambda \odot T(u) \end{aligned}$$

Agora, sendo  $T$  linear, mostraremos que  $L = \varphi^{-1} \circ T \circ \varphi$  é linear.

Sejam  $x, y \in E$ . Temos que

i)

$$\begin{aligned}
 L(x + y) &= \varphi^{-1}(T(\varphi(x + y))) \\
 &= \varphi^{-1}(T(\varphi(\varphi^{-1}(\varphi(x) \oplus \varphi(y)))))) \\
 &= \varphi^{-1}(T(\varphi(x) \oplus \varphi(y))) \\
 &= \varphi^{-1}(T(\varphi(x)) \oplus T(\varphi(y))) \\
 &= \varphi^{-1}(\varphi(\varphi^{-1}(T(\varphi(x)))) \oplus (\varphi(\varphi^{-1}(T(\varphi(y)))))) \\
 &= \varphi^{-1}(\varphi(L(x)) \oplus \varphi(L(y))) \\
 &= L(x) + L(y).
 \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
 L(\lambda x) &= \varphi^{-1}(T(\varphi(\lambda x))) \\
 &= \varphi^{-1}(T(\varphi(\varphi^{-1}(\lambda \odot \varphi(x)))))) \\
 &= \varphi^{-1}(T(\lambda \odot \varphi(x))) \\
 &= \varphi^{-1}(\lambda \odot T(\varphi(x))) \\
 &= \varphi^{-1}(\lambda \odot \varphi(\varphi^{-1}(T(\varphi(x)))))) \\
 &= \varphi^{-1}(\lambda \odot \varphi(L(x))) \\
 &= \lambda L(x)
 \end{aligned}$$

□

### 3.2.1 Transformações lineares em $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$

Seja  $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$  o espaço vetorial do Exemplo 2.2.3. Recordamos que as operações são induzidas pela aplicação  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  definida por  $\varphi(x, y) = (e^x, e^y)$ , cuja a inversa  $\varphi^{-1} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dada por  $\varphi^{-1}(x, y) = (\ln x, \ln y)$ .

Antes de calcularmos as transformações lineares vamos obter uma métrica adequada para  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ . Com esta métrica iremos explorar alguns detalhes geométricos que julgaremos importantes.

Pela Proposição 2.2.1, o produto interno em  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  é definido da seguinte forma: Sejam  $(x, y), (z, w) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ . Temos que

$$\begin{aligned}
 \langle (x, y), (z, w) \rangle &= \langle \varphi^{-1}(x, y), \varphi^{-1}(z, w) \rangle \\
 &= \langle (\ln x, \ln y), (\ln z, \ln w) \rangle \\
 &= \ln x \cdot \ln z + \ln y \cdot \ln w.
 \end{aligned}$$

Esse produto interno em  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  induz a norma

$$\begin{aligned} \|(x, y)\| &= \sqrt{\langle (x, y), (x, y) \rangle} \\ &= \sqrt{(\ln x)^2 + (\ln y)^2}. \end{aligned}$$

Essa norma induz uma métrica em  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  pondo-se, para  $(x, y), (z, w) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ ,

$$\begin{aligned} d_e((x, y), (z, w)) &= \|(x, y) - (z, w)\| = \left\| (x, y) \oplus \left( \frac{1}{z}, \frac{1}{w} \right) \right\| = \left\| \left( \frac{x}{z}, \frac{y}{w} \right) \right\| \\ &= \sqrt{\left( \ln \left( \frac{x}{z} \right) \right)^2 + \left( \ln \left( \frac{y}{w} \right) \right)^2}. \end{aligned}$$

Dessa maneira definimos uma métrica em  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ .

Agora passaremos ao estudo das transformações lineares em  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ . Seja  $L : (\mathbb{R}^2, +, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  a transformação linear no espaço  $\mathbb{R}^2$  canônico definida por

$$L(x, y) = (ax + by, cx + dy),$$

com  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Temos que

$$\begin{aligned} \varphi \circ L \circ \varphi^{-1}(x, y) &= (\varphi \circ L)(\ln x, \ln y) \\ &= \varphi(a \ln x + b \ln y, c \ln x + d \ln y) \\ &= \varphi(\ln x^a + \ln y^b, \ln x^c + \ln y^d) \\ &= (e^{\ln x^a + \ln y^b}, e^{\ln x^c + \ln y^d}) \\ &= (e^{\ln x^a} e^{\ln y^b}, e^{\ln x^c} e^{\ln y^d}) \\ &= (x^a y^b, x^c y^d). \end{aligned}$$

Pelo Teorema 3.2.1, a aplicação  $T : (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \oplus, \odot) \rightarrow (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$  definida por

$$T(x, y) = (x^a y^b, x^c y^d),$$

com  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , é uma transformação linear.

**Exemplo 3.2.1.** Se  $L : (\mathbb{R}^2, +, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  for dada por  $L(x, y) = (-x, -y)$ , com  $a = d = -1$  e  $b = c = 0$ , temos a transformação linear  $T : (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \oplus, \odot) \rightarrow (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$  definida por

$$T(x, y) = \left( \frac{1}{x}, \frac{1}{y} \right).$$

Esta transformação é a reflexão em torno da origem  $\varphi(0) = (1, 1)$  de  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ .

Note que a distância de  $(x, y) \neq (1, 1)$  pertencente a  $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$  até a origem é a mesma distância de  $\left( \frac{1}{x}, \frac{1}{y} \right)$  até a origem.

*De fato: Pela métrica definida em  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ , temos que a distância da origem  $(1, 1)$  até um ponto  $(x, y) \neq (1, 1)$  é dada por*

$$d_e((1, 1), (x, y)) = \|(x, y)\| = \sqrt{(\ln x)^2 + (\ln y)^2}.$$

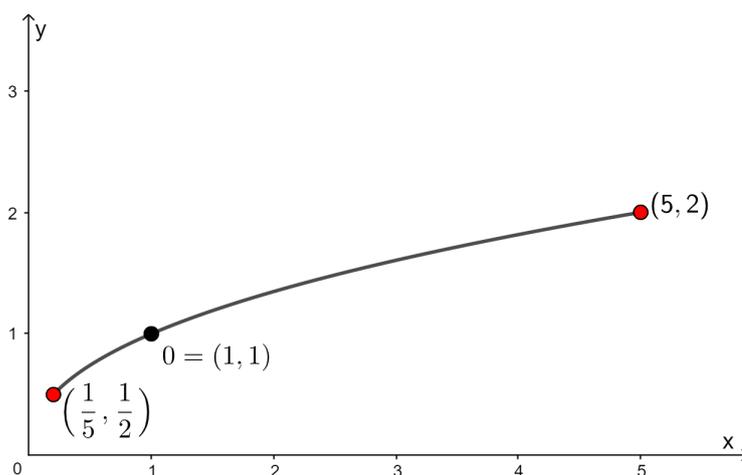
*Também temos que a distância da origem  $(1, 1)$  até um ponto  $T(x, y)$  é dada por*

$$d_e((1, 1), T(x, y)) = \|T(x, y)\| = \left\| \left( \frac{1}{x}, \frac{1}{y} \right) \right\| = \sqrt{\left( \ln \left( \frac{1}{x} \right) \right)^2 + \left( \ln \left( \frac{1}{y} \right) \right)^2}.$$

*Como  $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$ , segue que  $d_e((1, 1), (x, y)) = d_e((x, y), T(x, y))$ .*

A Figura 21 mostra os pontos  $(5, 2)$  e  $T(5, 2) = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right)$ . O leitor talvez não esteja acostumado com essa ideia geométrica. A intuição da geometria euclidiana pode nos levar a pensar que essas distâncias não são iguais.

Figura 21 – Ponto  $(5, 2)$  e seu simétrico  $\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right)$  em relação a origem de  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ .



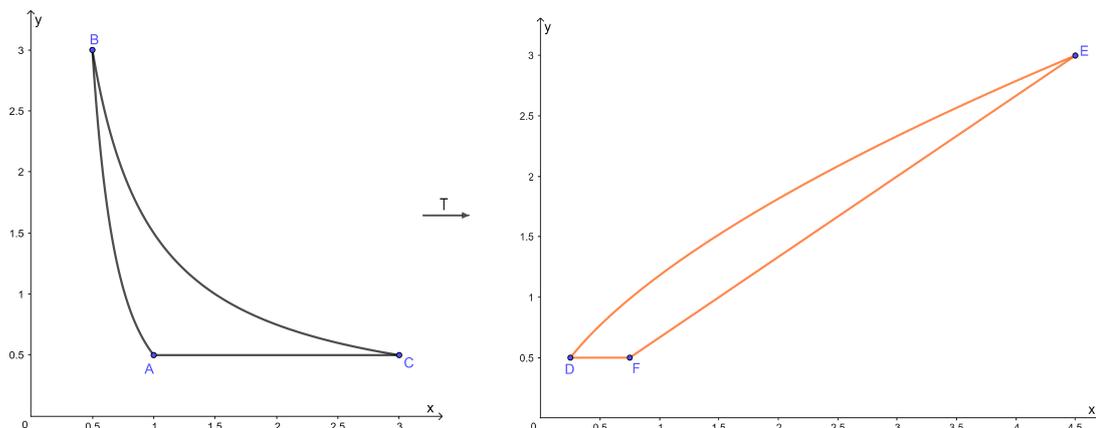
**Fonte:** Autor

**Exemplo 3.2.2.** Se  $L : (\mathbb{R}^2, +, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  for dada por  $L(x, y) = (x + 2y, y)$ , com  $a = d = 1$ ,  $b = 2$  e  $c = 0$ , obtemos a transformação

$$T(x, y) = (xy^2, y),$$

que é um cisalhamento na direção do eixo  $x$ . Consideremos o triângulo  $ABC$  da Figura 22, em que  $A = (1, \frac{1}{2})$ ,  $B = (\frac{1}{2}, 3)$  e  $C = (3, \frac{1}{2})$ . Aplicando a transformação nos vértices deste triângulo obtemos os pontos  $T(A) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ ,  $T(B) = (\frac{9}{2}, 3)$  e  $T(C) = (\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$ , que são vértices do triângulo  $DEF$ , onde  $D = T(A)$ ,  $E = T(B)$  e  $F = T(C)$ .

Figura 22 – Cisalhamento aplicado no triângulo  $ABC$ .



Fonte: Autor

Uma observação a ser feita é que se considerarmos a métrica definida em  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ , a distância de  $A$  até  $C$  é a mesma distância de  $D$  até  $F$ , pelo fato da transformação  $T(x, y) = (xy^2, y)$  ser um cisalhamento.

De fato:

$$d_e(A, C) = d_e\left(\left(1, \frac{1}{2}\right), \left(3, \frac{1}{2}\right)\right) = \sqrt{\left(\ln\left(\frac{1}{3}\right)\right)^2 + (\ln(1))^2} = \ln\left(\frac{1}{3}\right),$$

$$d_e(D, F) = d_e\left(\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)\right) = \sqrt{\left(\ln\left(\frac{1}{3}\right)\right)^2 + (\ln(1))^2} = \ln\left(\frac{1}{3}\right).$$

No próximo exemplo veremos transformações que determinam rotações em torno da origem de  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ .

**Exemplo 3.2.3.** Para o caso em que  $a = d = 0$  e  $b = -c = -1$  obtemos a transformação

$$R_{\frac{\pi}{2}}(x, y) = \left(\frac{1}{y}, x\right),$$

que é uma rotação de  $\frac{\pi}{2}$  no sentido anti-horário. Sendo  $a = d = -1$  e  $b = c = 0$ , temos a transformação

$$R_{\pi}(x, y) = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right),$$

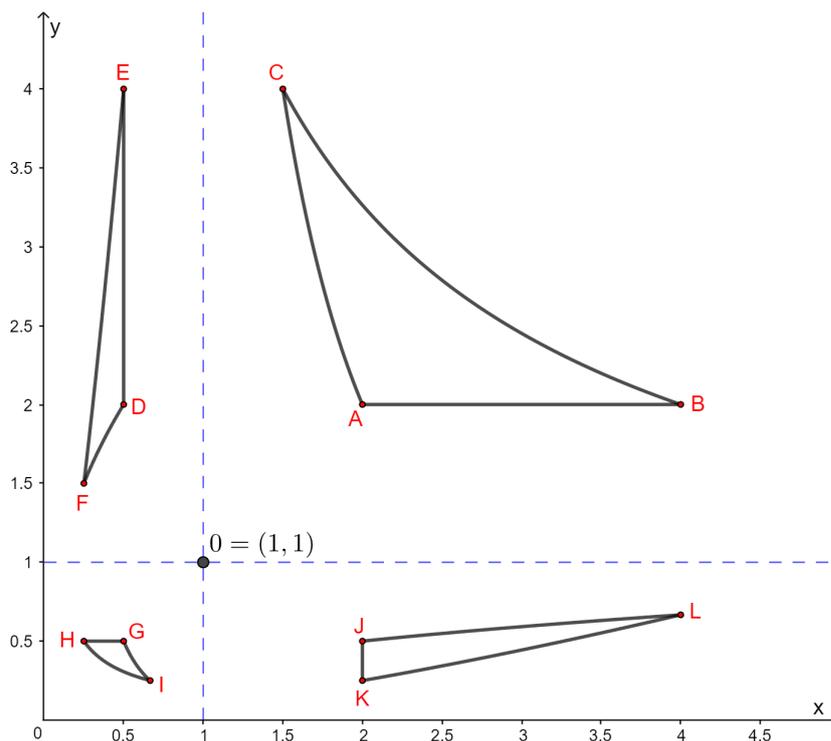
que determina uma rotação de  $\pi$  no sentido anti-horário. Por fim, se considerarmos  $a = d = 0$  e  $b = -c = 1$ , temos a transformação

$$R_{\frac{3\pi}{2}}(x, y) = \left(y, \frac{1}{x}\right),$$

que determina uma rotação de  $\frac{3\pi}{2}$  no sentido anti-horário.

Na Figura 23 é possível ver um exemplo ilustrativo. Ao aplicarmos a transformação linear  $R_{\frac{\pi}{2}}$  no triângulo  $ABC$ , onde  $A = (2, 2)$ ,  $B = (4, 2)$  e  $C = (\frac{3}{2}, 4)$ , obtemos o triângulo  $DEF$ . O triângulo  $GHI$  é obtido aplicando-se  $R_{\pi}$  ao triângulo  $ABC$  ou uma reflexão em torno da origem. Por fim, o triângulo  $JKL$  é obtido aplicando-se a transformação  $R_{\frac{3\pi}{2}}$  ao triângulo  $ABC$ . Ressaltamos que qualquer um desses triângulos pode ser obtido a partir do outro por uma rotação adequada.

Figura 23 – Rotação em torno da origem de  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  aplicada no triângulo  $ABC$ .



Fonte: Autor

Como esses triângulos são obtidos a partir de um outro apenas por rotações, a única diferença entre eles é o local e a posição em que se encontram. O leitor pode ser levado a considerar que todos eles são distintos em forma e tamanho. No entanto, possível impressão é reforçada apenas pelo olhar intuitivo do ponto de vista euclidiano usual. De fato: consideremos os triângulos  $ABC$  e  $GHI$ . Vamos calcular as medidas dos lados dos triângulos e veremos que os respectivos lados são congruentes. Pela métrica definida em  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ , temos que

$$d_e(A, B) = d_e((2, 2), (4, 2)) = \sqrt{\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 + (\ln(1))^2} = \left|\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \ln 2.$$

$$d_e(A, C) = d_e((2, 2), (\frac{3}{2}, 4)) = \sqrt{\left(\ln\left(\frac{4}{3}\right)\right)^2 + \left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2}.$$

$$d_e(B, C) = d_e\left((4, 2), \left(\frac{3}{2}, 4\right)\right) = \sqrt{\left(\ln\left(\frac{8}{3}\right)\right)^2 + \left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2}.$$

Agora calcularemos os lados do triângulo  $GHI$ . Temos que

$$d_e(G, H) = d_e\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)\right) = \sqrt{(\ln(2))^2 + (\ln(1))^2} = \ln 2.$$

$$d_e(G, I) = d_e\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{4}\right)\right) = \sqrt{\left(\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)^2 + (\ln(2))^2}.$$

$$d_e(H, I) = d_e\left(\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{4}\right)\right) = \sqrt{\left(\ln\left(\frac{3}{8}\right)\right)^2 + (\ln(2))^2}.$$

Dessa maneira, concluímos que  $d_e(A, B) = d_e(G, H)$ ,  $d_e(A, C) = d_e(G, I)$ , e  $d_e(B, C) = d_e(H, I)$ . Portanto, os triângulos  $ABC$  e  $GHI$  são congruentes. Analogamente mostra-se que os triângulos  $ABC$ ,  $DEF$  e  $JKL$  são congruentes.

**Observação:** Destacamos que a Figura 23 foi construída utilizando o software de geometria dinâmica Geogebra. Devido a Proposição 2.4.1 somente foi necessário calcular as imagens  $R_\theta(A)$ ,  $R_\theta(B)$ ,  $R_\theta(C)$  dos vértices do triângulo  $ABC$ , pela rotação adequada.

### 3.2.2 Transformações lineares em $S^2 - \{N\}$

Seja  $(S^2 - \{N\}, \oplus, \odot)$  o espaço vetorial do Exemplo 2.2.4, cuja as operações são obtidas pela aplicação  $\varphi^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 - \{N\}$  definida por

$$\varphi^{-1}(y) = \left( \frac{2y_1}{y_1^2 + y_2^2 + 1}, \frac{2y_2}{y_1^2 + y_2^2 + 1}, \frac{y_1^2 + y_2^2 - 1}{y_1^2 + y_2^2 + 1} \right), \text{ onde } y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,$$

sendo  $\varphi : S^2 - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  a projeção estereográfica expressa pela relação

$$x \mapsto \varphi(x) = \left( -\frac{x_1}{x_3 - 1}, -\frac{x_2}{x_3 - 1} \right), \text{ com } x = (x_1, x_2, x_3).$$

Antes de calcularmos as transformações lineares, obteremos uma métrica adequada para  $S^2 - \{N\}$ .

Pela proposição 2.2.1, podemos definir o produto interno em  $S^2 - \{N\}$  da seguinte forma:

Dados  $u = (u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3) \in S^2 - \{N\}$

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle_{S^2 - \{N\}} &= \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle \\ &= \left\langle \left( -\frac{u_1}{u_3 - 1}, -\frac{u_2}{u_3 - 1} \right), \left( -\frac{v_1}{v_3 - 1}, -\frac{v_2}{v_3 - 1} \right) \right\rangle \\ &= \frac{u_1 v_1}{(u_3 - 1)(v_3 - 1)} + \frac{u_2 v_2}{(u_3 - 1)(v_3 - 1)} \\ &= \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{(u_3 - 1)(v_3 - 1)} \end{aligned}$$

Além disso, esse produto interno induz em  $S^2 - \{N\}$  a norma

$$\|u\|_{S^2 - \{N\}} = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{\frac{u_1^2 + u_2^2}{(u_3 - 1)^2}} = \sqrt{\frac{1 - u_3^2}{(u_3 - 1)^2}} = \sqrt{\frac{u_3 + 1}{-u_3 + 1}}.$$

Essa norma induz uma métrica em  $S^2 - \{N\}$  pondo-se, para  $u, v \in S^2 - \{N\}$ ,

$$\begin{aligned} d((u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3)) &= \|(u_1, u_2, u_3) - (v_1, v_2, v_3)\| = \|(u_1, u_2, u_3) \oplus (-v_1, -v_2, v_3)\| \\ &= \|((-2(u_1(v_3 - 1) - v_1(u_3 - 1)))[(1 + u_3)(1 - v_3) - \\ &\quad 2(u_1 v_1 + u_2 v_2) + 2(1 - u_3)]^{-1}, (-2(u_2(v_3 - 1) - v_2(u_3 - 1))) \\ &\quad [(1 + u_3)(1 - v_3) - 2(u_1 v_1 + u_2 v_2) + 2(1 - u_3)]^{-1}, \\ &\quad ((u_1(v_3 - 1) - v_1(u_3 - 1))^2 + (u_2(v_3 - 1) - v_2(u_3 - 1))^2 - \\ &\quad ((u_3 - 1)(v_3 - 1))^2)[(u_1(v_3 - 1) - v_1(u_3 - 1))^2 + \\ &\quad (u_2(v_3 - 1) - v_2(u_3 - 1))^2 + ((u_3 - 1)(v_3 - 1))^2]^{-1})\| \\ &= \sqrt{\frac{(u_1(v_3 - 1) - v_1(u_3 - 1))^2 + (u_2(v_3 - 1) - v_2(u_3 - 1))^2}{((u_3 - 1)(v_3 - 1))^2}}. \end{aligned}$$

Dessa maneira definimos uma métrica em  $S^2 - \{N\}$ . Agora veremos as transformações lineares em  $S^2 - \{N\}$ . Sendo  $L : (\mathbb{R}^2, \oplus, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \oplus, \cdot)$  a transformação linear definida por

$$L(x, y) = (ax + by, cx + dy),$$

Calcularemos  $T = \varphi^{-1} \circ L \circ \varphi$ . Temos que

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= (\varphi^{-1} \circ L) \left( -\frac{x}{z-1}, -\frac{y}{z-1} \right) \\ &= \varphi^{-1} \left( -\frac{ax}{z-1} - \frac{by}{z-1}, -\frac{cx}{z-1} - \frac{dy}{z-1} \right) \\ &= \varphi^{-1} \left( -\frac{ax + by}{z-1}, -\frac{cx + dy}{z-1} \right) \\ &= \left( \frac{-2\left(\frac{ax+by}{z-1}\right)}{\left(\frac{ax+by}{z-1}\right)^2 + \left(\frac{cx+dy}{z-1}\right)^2 + 1}, \frac{-2\left(\frac{cx+dy}{z-1}\right)}{\left(\frac{ax+by}{z-1}\right)^2 + \left(\frac{cx+dy}{z-1}\right)^2 + 1}, \frac{\left(\frac{ax+by}{z-1}\right)^2 + \left(\frac{cx+dy}{z-1}\right)^2 - 1}{\left(\frac{ax+by}{z-1}\right)^2 + \left(\frac{cx+dy}{z-1}\right)^2 + 1} \right) \end{aligned}$$

$$= \left( \frac{-2(ax + by)(z - 1)}{(ax + by)^2 + (cx + dy)^2 + (z - 1)^2}, \frac{-2(cx + dy)(z - 1)}{(ax + by)^2 + (cx + dy)^2 + (z - 1)^2}, \frac{(ax + by)^2 + (cx + dy)^2 - (z - 1)^2}{(ax + by)^2 + (cx + dy)^2 + (z - 1)^2} \right).$$

De acordo com o Teorema 3.2.1, a aplicação  $T : (S^2 - \{N\}, \oplus, \odot) \longrightarrow (S^2 - \{N\}, \oplus, \odot)$  definida por

$$T(x, y, z) = \left( \frac{-2(ax + by)(z - 1)}{(ax + by)^2 + (cx + dy)^2 + (z - 1)^2}, \frac{-2(cx + dy)(z - 1)}{(ax + by)^2 + (cx + dy)^2 + (z - 1)^2}, \frac{(ax + by)^2 + (cx + dy)^2 - (z - 1)^2}{(ax + by)^2 + (cx + dy)^2 + (z - 1)^2} \right),$$

é uma transformação linear.

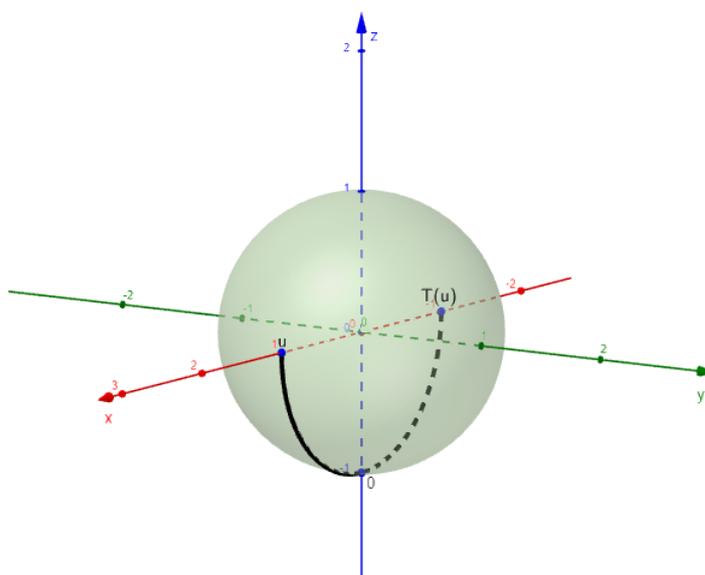
A seguir exploraremos alguns casos particulares de transformações em  $S^2 - \{N\}$ .

**Exemplo 3.2.4.** Na transformação anterior considere  $a = d = -1$  e  $b = c = 0$ . Desse modo obtemos a transformação

$$T(x, y, z) = \left( \frac{2x(z - 1)}{x^2 + y^2 + (z - 1)^2}, \frac{2y(z - 1)}{x^2 + y^2 + (z - 1)^2}, \frac{x^2 + y^2 - (z - 1)^2}{x^2 + y^2 + (z - 1)^2} \right),$$

a qual é a reflexão em torno da origem  $\varphi^{-1}(0) = (0, 0, -1)$ . A Figura 24 mostra os pontos  $u = (1, 0, 0)$  e  $T(u) = (-1, 0, 0)$ .

Figura 24 – Pontos simétricos, via reflexão, em relação à origem de  $S^2 - \{N\}$ .



Fonte: Autor

**Exemplo 3.2.5.** Se  $a = d = 0$  e  $b = -c = -1$ , obtemos a rotação de um ângulo  $\frac{\pi}{2}$  em torno da origem e no sentido anti-horário, isto é,

$$R_{\frac{\pi}{2}}(x, y, z) = \left( \frac{2y(z-1)}{x^2 + y^2 + (z-1)^2}, -\frac{2x(z-1)}{x^2 + y^2 + (z-1)^2}, \frac{x^2 + y^2 - (z-1)^2}{x^2 + y^2 + (z-1)^2} \right).$$

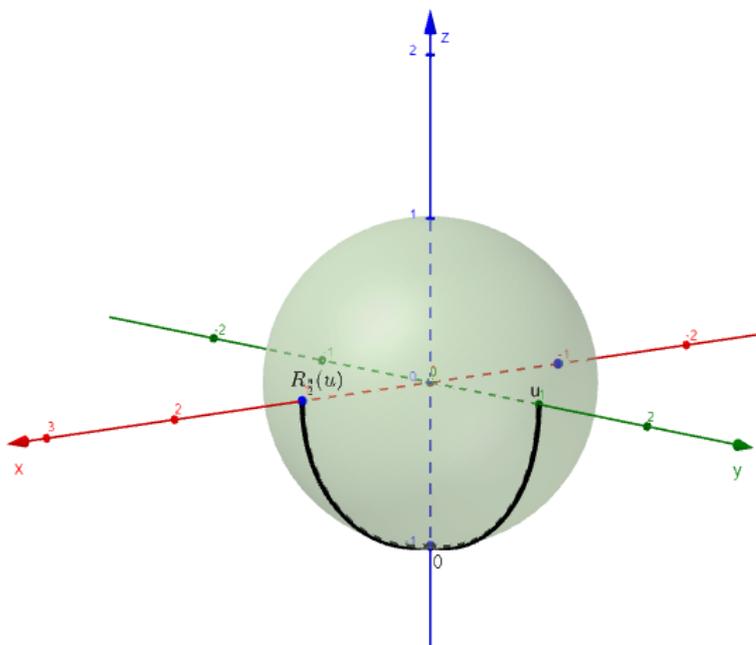
Seja  $\theta$  o ângulo entre  $(x, y, z) \neq (0, 0, -1)$  e  $R_{\frac{\pi}{2}}(x, y, z)$  então, pela Proposição 2.2.1

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\langle \varphi(x, y, z), \varphi(R_{\frac{\pi}{2}}(x, y, z)) \rangle}{\| (x, y, z) \|_{\mathbb{S}^2 - \{N\}} \| (R_{\frac{\pi}{2}}(x, y, z)) \|_{\mathbb{S}^2 - \{N\}}} = \frac{\left\langle \left( -\frac{x}{z-1}, -\frac{y}{z-1} \right), \left( \frac{y}{z-1}, -\frac{x}{z-1} \right) \right\rangle}{\| (x, y, z) \|_{\mathbb{S}^2 - \{N\}} \| (R_{\frac{\pi}{2}}(x, y, z)) \|_{\mathbb{S}^2 - \{N\}}} \\ &= \frac{-\frac{xy}{(z-1)^2} + \frac{xy}{(z-1)^2}}{\| (x, y, z) \|_{\mathbb{S}^2 - \{N\}} \| (R_{\frac{\pi}{2}}(x, y, z)) \|_{\mathbb{S}^2 - \{N\}}} = \frac{\frac{-xy+xy}{(z-1)^2}}{\| (x, y, z) \|_{\mathbb{S}^2 - \{N\}} \| (R_{\frac{\pi}{2}}(x, y, z)) \|_{\mathbb{S}^2 - \{N\}}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Isso mostra que o ângulo  $\theta$  entre  $(x, y, z)$  e  $R_{\frac{\pi}{2}}(x, y, z)$  é tal que  $\cos \theta = 0$ . Portanto, devemos ter  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

A Figura 25 mostra os pontos  $u = (0, 1, 0)$  e  $R_{\frac{\pi}{2}}(0, 1, 0) = (-1, 0, 0)$ .

Figura 25 – Ponto  $(0, 1, 0)$  e sua imagem obtida através da rotação  $R_{\frac{\pi}{2}}$  em torno da origem.



Fonte: Autor

**Exemplo 3.2.6.** Se  $L : (\mathbb{R}^2, +, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  for dada por  $L(x, y) = 2(x, y)$ , com  $a = d = 2$  e  $b = c = 0$ , obtemos a transformação

$$T(x, y, z) = \left( \frac{-4x(z-1)}{4(x^2 + y^2) + (z-1)^2}, \frac{-4y(z-1)}{4(x^2 + y^2) + (z-1)^2}, \frac{4(x^2 + y^2) - (z-1)^2}{4(x^2 + y^2) + (z-1)^2} \right).$$

Esta transformação é uma dilatação na direção do vetor, no caso em que  $\alpha$  é igual a 2, ou seja, a transformação leva cada vetor  $v$  no vetor  $T(v)$  cuja norma possui o dobro da norma  $v$ .

De fato, segue da norma definida em  $S^2 - \{N\}$  que a norma do vetor  $(x, y, z) \neq (0, 0, -1)$  é dada por

$$\|(x, y, z)\|_{S^2-\{N\}} = \sqrt{\frac{z+1}{-z+1}}.$$

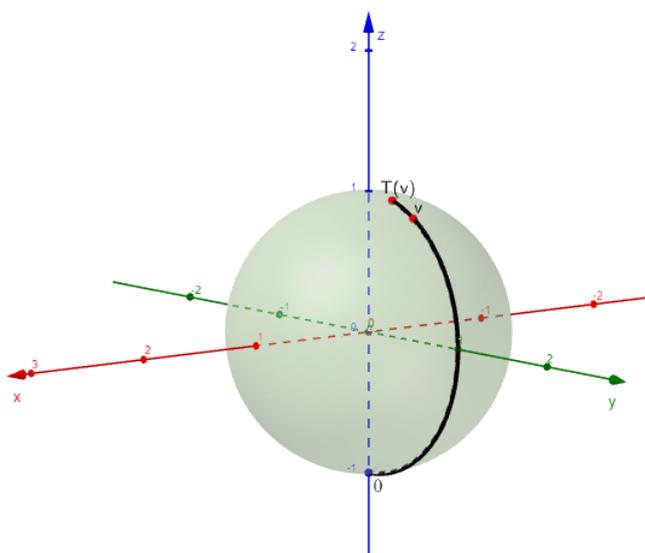
Também temos que a norma de  $T(x, y, z)$  é dada por

$$\begin{aligned} \|T(x, y, z)\|_{S^2-\{N\}} &= \sqrt{\frac{\frac{4(x^2+y^2)-(z-1)^2}{4(x^2+y^2)+(z-1)^2} + 1}{-\frac{4(x^2+y^2)-(z-1)^2}{4(x^2+y^2)+(z-1)^2} + 1}} = \sqrt{\frac{\frac{8(x^2+y^2)}{4(x^2+y^2)+(z-1)^2}}{\frac{2(z-1)^2}{4(x^2+y^2)+(z-1)^2}}} = \sqrt{\frac{4(x^2+y^2)}{(z-1)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{4(1-z^2)}{(z-1)^2}} = \sqrt{\frac{4(z+1)}{-z+1}} = 2\sqrt{\frac{z+1}{-z+1}}. \end{aligned}$$

Portanto  $\|T(x, y, z)\|_{S^2-\{N\}} = 2\|(x, y, z)\|_{S^2-\{N\}}$ .

A Figura 26 mostra um caso particular, com  $v = (0, \sqrt{0.25}, \sqrt{0.75})$  e  $T(v) = \left(0, \frac{-4\sqrt{0.25}(\sqrt{0.75}-1)}{2.75-2\sqrt{0.75}}, \frac{2\sqrt{0.75}-0.75}{2.75-2\sqrt{0.75}}\right)$ .

Figura 26 – Dilatação na esfera



Fonte: Autor

Com isso devemos ter que a distância da origem  $0 = (0, 0, -1)$  de  $S^2 - \{N\}$  até  $v$  é a mesma distância de  $v$  até  $T(v)$ .

Calculando essas distâncias obtemos:

$$\begin{aligned} d_{S^2-\{N\}}(0, v) &= \|v\| = \|(0, \sqrt{0.25}, \sqrt{0.75})\| \\ &= \sqrt{\frac{\sqrt{0.75}+1}{-\sqrt{0.75}+1}} = \frac{\sqrt{0.75}+1}{\sqrt{0.25}} \approx 3.732. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d(v, T(v)) &= d\left((0, \sqrt{0.25}, \sqrt{0.75}), \left(0, \frac{4(\sqrt{0.25} - \sqrt{0.1875})}{2.75 - 2\sqrt{0.75}}, \frac{2\sqrt{0.75} - 0.75}{2.75 - 2\sqrt{0.75}}\right)\right) \\
&= \sqrt{\frac{\left(\sqrt{0.25}\left(\frac{4\sqrt{0.75}-3.5}{2.75-2\sqrt{0.75}}\right) - \frac{4(\sqrt{0.25}-\sqrt{0.1875})}{2.75-2\sqrt{0.75}}(\sqrt{0.75}-1)\right)^2}{\left((\sqrt{0.75}-1)\left(\frac{4\sqrt{0.75}-3.5}{2.75-2\sqrt{0.75}}\right)\right)^2}} \\
&= \frac{\frac{4\sqrt{0.1875}-3.5\sqrt{0.25}}{2.75-2\sqrt{0.75}} - \frac{4\sqrt{0.75}(\sqrt{0.25}-\sqrt{0.1875})}{2.75-2\sqrt{0.75}} + \frac{4(\sqrt{0.25}-\sqrt{0.1875})}{2.75-2\sqrt{0.75}}}{\frac{3-3.5\sqrt{0.75}}{2.75-2\sqrt{0.75}} - \frac{4\sqrt{0.75}-3.5}{2.75-2\sqrt{0.75}}} \\
&= \frac{3.5\sqrt{0.25} - 4\sqrt{0.1875}}{6.5 - 7.5\sqrt{0.75}} \approx 3.732.
\end{aligned}$$

### 3.3 NÚCLEO E IMAGEM DE TRANSFORMAÇÕES LINEARES EM NOVAS ESTRUTURAS

Nesta subseção apresentamos dois resultados que determinam o núcleo  $N(T)$  e a imagem  $Im(T)$  de uma transformação linear em espaços vetoriais obtidos via bijeção.

**Teorema 3.3.1.** *Sejam  $E = (E, +, \cdot)$  um espaço vetorial e  $F = (F, \oplus, \odot)$  o espaço vetorial com a estrutura definida por uma bijeção  $\varphi : E \rightarrow F$ . Se  $L : E \rightarrow E$  é uma transformação linear e  $T = \varphi \circ L \circ \varphi^{-1} : F \rightarrow F$  a transformação linear obtida via  $\varphi$  e  $L$  então,  $N(T) = \varphi(N(L))$ .*

*Demonstração.* Inicialmente provaremos que  $N(T) \subset \varphi(N(L))$ . Dado  $z \in N(T)$ , mostraremos que  $z = \varphi(u)$  para algum  $u \in N(L)$ . Como  $\varphi(\varphi^{-1}(z)) = z$ , o candidato natural é  $u = \varphi^{-1}(z)$ . Como, por hipótese,  $T(z) = 0$ , segue que  $(\varphi \circ L \circ \varphi^{-1})(z) = \varphi(L(\varphi^{-1}(z))) = \varphi(L(u)) = 0$ . Como  $\varphi$  é injetiva e  $\varphi(0) = 0$ , segue que  $L(u) = 0$ , ou seja,  $u \in N(L)$ . Com isso temos que  $z \in \varphi(N(L))$ . Logo,  $N(T) \subset \varphi(N(L))$ .

Prosseguindo, vamos mostrar agora que  $\varphi(N(L)) \subset N(T)$ . Dado  $z \in \varphi(N(L))$ , existe  $w \in N(L)$  tal que  $\varphi(w) = z$ . Como  $w \in N(L)$  temos que  $L(w) = 0$ . Assim,  $T(z) = T(\varphi(w)) = (\varphi \circ L \circ \varphi^{-1})(\varphi(w)) = (\varphi \circ L)(w) = \varphi(0) = 0$ . Isso mostra que  $z \in N(T)$ , logo  $\varphi(N(L)) \subset N(T)$ . Portanto  $N(T) = \varphi(N(L))$ .  $\square$

**Exemplo 3.3.1.** *Seja  $T : (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \oplus, \odot) \rightarrow (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$  a transformação linear definida por*

$$T(x, y) = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right),$$

vista no Exemplo 3.2.1. O núcleo de  $T$  é o conjunto

$$N(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ / T(x, y) = (1, 1)\}.$$

Então, devemos ter

$$\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) = (1, 1), \text{ ou seja, } \frac{1}{x} = 1 \text{ e } \frac{1}{y} = 1.$$

Assim,  $x = 1$  e  $y = 1$ , logo

$$N(T) = \{(1, 1)\} = \{0\}.$$

Note que o núcleo da transformação  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $L(x, y) = (-x, -y)$  é o conjunto

$$N(L) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / L(x, y) = (0, 0)\},$$

ou seja

$$(-x, -y) = (0, 0).$$

Logo, devemos ter  $x = 0$  e  $y = 0$ . Com isso temos que

$$N(L) = \{(0, 0)\}.$$

Aplicando  $\varphi(x, y) = (e^x, e^y)$  em  $N(L)$  obtemos

$$\varphi(N(L)) = \varphi(0, 0) = (e^0, e^0) = (1, 1).$$

Com isso verificamos que  $N(T) = \varphi(N(L))$ , conforme estabeleceu o Teorema 3.3.1.

**Exemplo 3.3.2.** Seja  $T : (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \oplus, \odot) \rightarrow (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$  a transformação linear definida por

$$T(x, y) = (x^a y^b, x^c y^d),$$

com  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , vista na Seção 3.2.1 Para o caso em que  $a = c = 2$  e  $b = d = -1$ , obtemos a transformação linear

$$H(x, y) = (x^2 y^{-1}, x^2 y^{-1}) = \left(\frac{x^2}{y}, \frac{x^2}{y}\right).$$

O núcleo de  $H$  é o conjunto

$$N(H) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ / H(x, y) = (1, 1)\}.$$

Então, devemos ter

$$\left(\frac{x^2}{y}, \frac{x^2}{y}\right) = (1, 1), \text{ ou seja, } \frac{x^2}{y} = 1 \text{ e } \frac{x^2}{y} = 1.$$

Assim,  $y = x^2$  e portanto,

$$N(H) = \{(x, x^2) / x \in \mathbb{R}\}.$$

Como estamos considerando  $a = c = 2$  e  $b = d = -1$ , então a transformação linear  $L : (\mathbb{R}^2, +, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  é definida por

$$L(x, y) = (2x - y, 2x - y).$$

O núcleo da transformação  $L$  é o conjunto

$$N(L) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / L(x, y) = (0, 0)\}.$$

Assim, para determinar  $N(L)$  devemos fazer

$$(2x - y, 2x - y) = (0, 0).$$

Segue dessa equação que  $y = 2x$ . Logo,

$$N(L) = \{(x, 2x) / x \in \mathbb{R}\}.$$

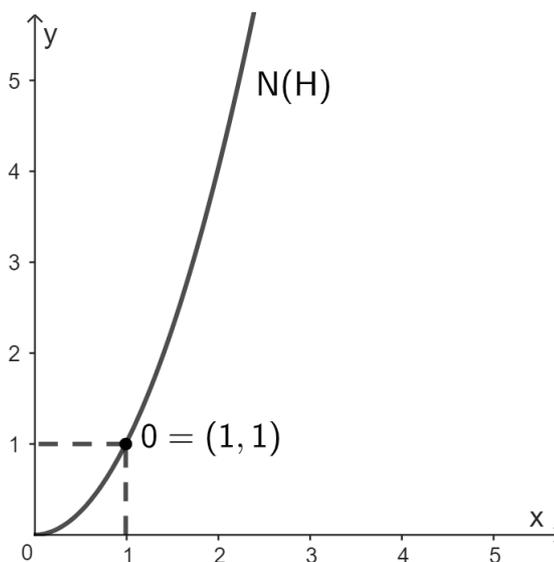
Agora vamos aplicar  $\varphi(x, y) = (e^x, e^y)$  em  $N(L)$ . Observe que

$$\varphi(a, 2a) = (e^a, e^{2a}).$$

Isso mostra que os elementos de  $\varphi(N(L))$  são da forma  $(e^u, e^{2u})$ . Fazendo  $e^u = x$  obtemos que os elementos de  $\varphi(N(L))$  são da forma  $(x, x^2)$ , com  $x > 0$ , ou seja,  $\varphi(N(L)) = \{(x, x^2); x > 0\}$ . Portanto  $N(H) = \varphi(N(L))$ .

Observemos na Figura 27 que o conjunto  $N(H)$  é a reta que passa pela origem  $(1, 1)$  de  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ .

Figura 27 – Núcleo de H



Fonte: Autor.

**Teorema 3.3.2.** *Sejam  $E = (E, +, \cdot)$  um espaço vetorial e  $F = (F, \oplus, \odot)$  o espaço vetorial com a estrutura definida por uma bijeção  $\varphi : E \rightarrow F$ . Se  $L : E \rightarrow E$  é uma transformação linear e  $T = \varphi \circ L \circ \varphi^{-1} : F \rightarrow F$  a transformação linear obtida via  $\varphi$  e  $L$  então,  $Im(T) = \varphi(Im(L))$ .*

*Demonstração.* Inicialmente provaremos que  $Im(T) \subset \varphi(Im(L))$ . Dado  $z \in Im(T)$ , existe  $w \in F$ , tal que  $T(w) = z$ . Segue que  $z = T(w) = (\varphi \circ L \circ \varphi^{-1})(w) = \varphi(L(\varphi^{-1}(w)))$ . Como  $L(\varphi^{-1}(w)) \in Im(L)$ , resulta que  $\varphi(L(\varphi^{-1}(w))) \in \varphi(Im(L))$ . Logo,  $z \in \varphi(Im(L))$ . Isso mostra que  $Im(T) \subset \varphi(Im(L))$ . Prosseguindo, vamos mostrar que  $\varphi(Im(L)) \subset Im(T)$ . Dado  $z \in \varphi(Im(L))$ , existe  $w \in Im(L)$  tal que  $\varphi(w) = z$ . Como  $w \in Im(L)$  então existe  $u \in E$  tal que  $L(u) = w$ , desse modo  $z = \varphi(w) = \varphi(L(u))$ . Seja  $v \in F$  tal que  $\varphi(u) = v$ , isto é,  $u = \varphi^{-1}(v)$ . Segue que  $z = \varphi(L(u)) = \varphi(L(\varphi^{-1}(v))) = (\varphi \circ L \circ \varphi^{-1})(v) = T(v) \in Im(T)$ . Isso mostra que  $\varphi(Im(L)) \subset Im(T)$ . Como  $Im(T) \subset \varphi(Im(L))$  e  $\varphi(Im(L)) \subset Im(T)$ , concluímos que  $Im(T) = \varphi(Im(L))$ .  $\square$

**Exemplo 3.3.3.** *Seja  $T : (\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \oplus, \odot) \rightarrow (\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \oplus, \odot)$  a transformação linear definida por*

$$T(x, y) = \left( \frac{1}{x}, \frac{1}{y} \right),$$

*vista no Exemplo 3.2.1. A imagem de  $T$  é o conjunto*

$$Im(T) = \{(a, b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ / (a, b) = \left( \frac{1}{x}, \frac{1}{y} \right) \text{ para algum } (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+\}.$$

*Como o sistema  $\begin{cases} \frac{1}{x} = a \\ \frac{1}{y} = b \end{cases}$  possui solução para qualquer  $(a, b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ , segue que  $Im(T) = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ . Por outro lado, a transformação  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $L(x, y) = (-x, -y)$  possui imagem dada por  $Im(L) = \mathbb{R}^2$ . Como a aplicação  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  definida por  $\varphi(x, y) = (e^x, e^y)$  é sobrejetiva, segue imediatamente que  $\varphi(Im(L)) = \varphi(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ = Im(T)$ . Portanto, confere a igualdade  $Im(T) = \varphi(Im(L))$ . Como já sabíamos que  $dimN(T) = 0$ , essa igualdade já poderia ser obtida diretamente ao usarmos o Teorema da dimensão.*

**Exemplo 3.3.4.** *Consideremos a transformação  $H(x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  definida por*

$$H(x) = \left( \frac{x^2}{y}, \frac{x^2}{y} \right)$$

*vista no Exemplo 3.3.2. A imagem de  $H$  é o conjunto*

$$Im(H) = \{(a, b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ / (a, b) = \left( \frac{x^2}{y}, \frac{x^2}{y} \right) \text{ para algum } (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+\}.$$

Com isso temos que  $a = b$ . Fazendo  $a = x$ , temos que a imagem de  $H$  é o conjunto

$$Im(H) = \{(x, x); x > 0\}.$$

A imagem da transformação  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$L(x, y) = (2x - y, 2x - y)$$

é o conjunto

$$Im(L) = \{(x, x); x \in \mathbb{R}\}.$$

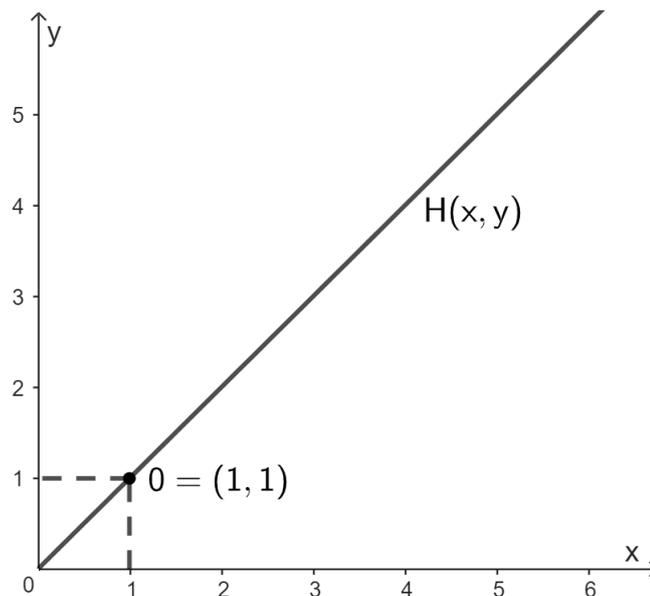
Aplicando  $\varphi(x, y) = (e^x, e^y)$  em  $Im(L)$ , obtemos

$$\varphi(a, a) = (e^a, e^a).$$

Isso mostra que os elementos de  $\varphi(Im(L))$  são da forma  $(e^a, e^a)$ . Fazendo  $e^a = x$  obtemos que os elementos de  $\varphi(Im(L))$  são da forma  $(x, x)$ , com  $x > 0$ , ou seja,  $\varphi(Im(L)) = \{(x, x); x > 0\}$ . Portanto  $Im(H) = \varphi(Im(L))$ .

A Figura 28 mostra a representação geométrica da imagem de  $H$ .

Figura 28 – Imagem da transformação  $H(x,y)$



Fonte: Autor.

Como consequência dos Teoremas 3.3.1 e 3.3.2 e do Teorema da Dimensão, temos o seguinte corolário.

**Corolário 3.3.1.** *Sejam  $E = (E, +, \cdot)$  um espaço vetorial e  $F = (F, \oplus, \odot)$  o espaço vetorial com a estrutura definida por uma bijeção  $\varphi : E \rightarrow F$ . Se  $L : E \rightarrow E$  é uma transformação linear e  $T = \varphi \circ L \circ \varphi^{-1} : F \rightarrow F$  a transformação linear obtida via  $\varphi$  e  $L$ , então*

$$\dim(\varphi(N(L))) + \dim(\varphi(Im(L))) = \dim(\varphi(E)).$$

**Exemplo 3.3.5.** No Exemplo 3.2.1, temos que  $\dim(\varphi(N(L))) = 0$ , pois  $N(T) = \{0\}$ . Consequentemente, temos que  $\dim(\varphi(\text{Im}(L))) = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  e  $\dim(\varphi(\mathbb{R}^2)) = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ , logo  $\dim(\varphi(\text{Im}(L))) = \dim(\varphi(\mathbb{R}^2))$ .

**Exemplo 3.3.6.** Consideremos a transformação linear  $H(x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  definida por

$$H(x) = \left( \frac{x^2}{y}, \frac{x^2}{y} \right).$$

Vimos que  $\varphi(N(L)) = \{(x, x^2); x > 0\}$  e  $\varphi(\text{Im}(L)) = \{(x, x); x > 0\}$ . Logo  $\dim(\varphi(N(L))) = 1$  e  $\dim(\varphi(\text{Im}(L))) = 1$ . Portanto,  $\dim(\varphi(N(L))) + \dim(\varphi(\text{Im}(L))) = \dim(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$ , conforme prevê Corolário 3.3.1.

## 4 CONCLUSÃO

Em nosso trabalho obtivemos resultados que mostram como obter transformações lineares em espaços vetoriais do tipo gráfico e em espaços vetoriais construídos via bijeções.

Primeiramente mostramos como se dá a construção das novas estruturas de espaços vetoriais, estudo feito por Rufino e Naveca (2021) e Lopes (2018). Com as estruturas bem definidas foi possível trabalhar as transformações lineares.

Trabalhamos as transformações lineares nos espaços vetoriais do tipo gráfico, como o parabolóide e o gráfico da função  $f(x, y) = e^{x+y}$ , e também nos espaços vetoriais obtidos através de bijeções, como a esfera  $S^2 - \{N\}$ . Definimos as transformações nestes espaços e exploramos vários casos particulares nos exemplos apresentados.

Também trabalhamos com as métricas induzidas pelas bijeções, a fim de explorar ideias de distâncias que diferem da distância canônica no espaço euclidiano. Aspectos geométricos utilizando o software de geometria dinâmica Geogebra, foram explorados para facilitar a compreensão do leitor.

Nosso trabalho dá uma contribuição ao estudo da álgebra linear em nível de graduação, desvendando alguns aspectos antes não explorados pelos livros didáticos constantes na literatura.

## REFERÊNCIAS

- BOYER, C. B. ***História da Matemática***. [S.l.]: Editora Blucher, 2019.
- LIMA, E. L. ***Espaços Métricos***. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq Rio de Janeiro, 1983. v. 4.
- LIMA, E. L. ***Álgebra Linear***. 9. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2018.
- LOPES, T. A. **Uma conexão entre a álgebra Linear e a Teoria dos Conjuntos**. *Universidade Estadual Paulista (UNESP)*, 2018.
- NOGUEIRA, L. B. **Transformações lineares no plano e aplicações**. *Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás*, 2013.
- RUFINO, E. O. **Transformações lineares em novas estruturas de espaços vetoriais**. *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática*, v. 7, 2022.
- RUFINO, E. O.; NAVECA, K. D. **Novos exemplos de espaços vetoriais do tipo gráfico**. *RCT-Revista de Ciência e Tecnologia*, v. 7, 2021.
- STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. **Álgebra linear**. 2. ed., *Pearson Maron Books, São Paulo*, 1987.