UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA
CENTRO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
DEPARTAMANTO DE MATEMÁTICA

JOANA DOS SANTOS DOURADO

SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS PARA O ENSINO DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Boa Vista-RR
2022

JOANA DOS SANTOS DOURADO

SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS PARA O ENSINO DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como pré-requisito para a obtenção do título de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Roraima.

Orientadora: Profa. Dra. Edileusa do Socorro Valente Belo

Boa Vista- RR

2022

Dados Internacionais de Catalogação na publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal de Roraima

D739s Dourado, Joana dos Santos.
Sequências didáticas para o ensino de funções trigonométricas / Joana dos Santos Dourado. – Boa Vista, 2022.
48 f. : il.

Orientadora: Profa. Dra. Edileusa do Socorro Valente Belo.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) - Universidade Federal de Roraima, Curso de Matemática.

1 - Sequências didáticas. 2 - Funções trigonométricas. 3 - Formação do professor de matemática. I - Título. II - Belo, Edileusa do Socorro Valente (orientadora).

CDU - 541.11.6

Ficha Catalográfica elaborada pela Bibliotecária/Documentalista:
Maria de Fátima Andrade Costa - CRB-11/453-AM

JOANA DOS SANTOS DOURADO

SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS PARA FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

A Banca Examinadora do Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), apresentado junto ao Departamento de Matemática da UFRR, pré-requisito para a obtenção do título de Licenciado em Matemática, realizado sob a orientação da Professora Dra. Edileusa do Socorro Valente Belo.

Parecer: Aprovado

Data de aprovação: 16/03/2022

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Edileusa do Socorro Valente Belo
(Orientadora)

Prof. Dr. Hector José Garcia Mendoza

Profa. Dra. Kelly Karina Santos

Dedico à Deus que é a minha força nessa caminhada e à minha família por todo apoio.

AGRADECIMENTOS

Essa é a parte do trabalho em que demonstramos que ao longo da busca por formação, não caminhamos sozinhos. Por esse motivo, preciso agradecer em especial e primeiro lugar a Deus, por permitir mais esta conquista. Onde esteve presente em cada passo, em cada dificuldade e em cada desafio. Mostrando-me o quão grande Ele é, que podia confiar, certamente o mais Ele fez e está fazendo em minha vida.

A família, agradeço por terem me apoiado e serem incentivo nesta conquista. Por todos os momentos adversos estarem presentes sendo a minha força. Agora em especial, não poderia deixar de agradecer a pessoa que almejou muito juntamente comigo esta etapa da minha formação e motivou sempre, além de estar ao meu lado em todas as circunstâncias apoiando, minha mãe Vânia Gonçalo dos Santos.

Agradeço a esse casal que de certa forma fizeram parte da minha caminhada, a Vânia dos Santos Dourado e Berlone Conceição da Costa por todo apoio.

Agradeço a minha orientadora Prof. Dra. Edileusa do Socorro Valente Belo por todo suporte e ainda como direcionou os trabalhos motivando-me sempre. Por toda contribuição e auxílio, ainda pelo notório compromisso e responsabilidade em torno da concretização deste trabalho.

Estendo meus agradecimentos a todos os professores da Universidade Federal de Roraima que contribuíram para minha formação. Ainda ao Departamento de Matemática (DMAT/UFRR), aos professores que participaram dessa jornada, que contribuíram para que eu adquirisse experiência com seus ensinos.

Agradeço a Universidade Federal de Roraima pela oportunidade. Aos meus amigos que consegui na UFRR, à essa força motivadora que encontrei em cada um deles.

Agradeço ainda, aos meus amigos que são uma força motivadora nessa conquista, ao meu grupo de estudo composto por Claudenice, Crislene, Nayara, Rosailda e Vânia.

Finalizo meus agradecimentos destacando a importância de acreditar em si mesmo, que irá conseguir, por mais que as coisas pareçam difíceis. E ainda, não estamos sozinhos, posso dizer que até aqui o Senhor tem me ajudado!

RESUMO

O presente estudo tem como objetivo apresentar Sequencias Didáticas (SD) para o ensino de funções trigonométricas: seno, cosseno e tangente. Apresentamos a definição de SD e a importância na formação do professor de matemática. Metodologicamente desenvolvemos uma pesquisa teórica, pois, aprofundamos e discutimos os conhecimentos matemáticos propondo SDs para o ensino. Concluímos trazendo quatro Sequências Didáticas sobre como desenvolver aulas no conteúdo de Funções trigonométricas. A construção das sequências para o ensino de trigonometria leva-nos a refletir a real dificuldade e necessidade de aprendizagem dos alunos, impulsionando a buscar estratégias de ensino que os alcance. O que de fato contribui para o professor de Matemática, para o professor de qualquer área pois nos coloca em uma posição de responsabilidade e comprometimento para com a educação, no que diz respeito a qualidade no ensino obtendo-se resultados positivos.

Palavras-chave: Sequências Didáticas, Funções Trigonométricas, Formação do Professor de Matemática.

ABSTRACT

The present study aims to present Didactic Sequences (SD) for teaching trigonometric functions: sine, cosine and tangent. We present the definition of SD and its importance in the training of mathematics teachers. Methodologically, we developed a theoretical research, therefore, we deepened and discussed the mathematical knowledge proposing SDs for teaching. We conclude by bringing four Didactic Sequences on how to develop classes in the content of Trigonometric Functions. The construction of sequences for teaching trigonometry leads us to reflect on the real difficulty and need for students to learn, encouraging them to seek teaching strategies that reach them. What in fact contributes to the Mathematics teacher, to the teacher of any area because it puts us in a position of responsibility and commitment to education, with regard to quality in teaching, obtaining positive results.

Keywords: Didactic Sequences, Trigonometric Functions, Mathematics Teacher Training.

LISTA DE QUADRO

LISTA DE SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
DMAT	Departamento de Matemática
NEaD	Núcleo de Educação a Distância
PCSD	Processo de Construção de Sequência Didática
PIBID	Programa de Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência
SD’s	Sequências Didáticas
UFRR	Universidade Federal de Roraima
ZDP	Zona de Desenvolvimento Proximal

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

O presente trabalho é uma proposta de ensino para professores de Matemática do Ensino Médio no conteúdo de Funções Trigonométricas, utilizando Sequências Didáticas (SDs) como estratégia de ensino.

O trabalho está distribuído em 5 tópicos. No primeiro apresentamos a Trajetória da vida estudantil/acadêmica da autora até a escolha pelo tema de estudo. No tópico 02 a importância das Sequências Didáticas na formação do professor de Matemática. Ressaltaremos diversos aspectos que contribuem para a formação do professor de Matemática, proporcionando auxílio na compreensão de cada passo no processo de ensino. Aspectos estes que se revelam no Processo de Construção de Sequência Didática, colaborando na formação docente.

No segundo subitem do capítulo 02 analisamos alguns conceitos acerca do conteúdo de funções trigonométricas: seno, cosseno e tangente, embasados no livro de Gelson Iezzi da Coleção Fundamentos de Matemática Elementar, nos quais objetivam a formação dos professores de Matemática do Ensino Médio. Contemplamos esse paralelo entre Iezzi (2013) e os conceitos e ideias do livro didático de Paiva (2010).

No tópico 03 temos a metodologia da pesquisa na qual é caracterizada como pesquisa qualitativa teórica, aprofundando os conteúdos matemáticos de Funções Trigonométricas e dando ênfase na elaboração de SDs para esse conteúdo. Fizemos uma breve análise da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) do Ensino Médio no que diz respeito as competências e habilidades esperadas para o ensino e aprendizagem dos conteúdos das funções trigonométricas: Seno, Cosseno e tangente e no uso da tecnologia e sua importância no ensino da Matemática.

No tópico 04 são apresentadas as Sequências Didáticas para o conteúdo foco deste trabalho, propondo o planejamento e execução para cada aula e suas respectivas abordagens baseadas no livro didático do Paiva (2010). Ainda, traz um enfoque sobre a importância dos conhecimentos prévios dos alunos no ensino em conformidade com a teoria da aprendizagem significativa.

1. O PERCURSO ATÉ A LICENCIATURA

A escolha no curso de graduação não foi uma tarefa simples, tive outras opções de cursos até perceber que deveria investir em algo que realmente gostasse não só pela fama do curso e o retorno que teria futuramente. Sempre admirei a matemática mas, nem imaginava que seguiria essa profissão. Tive um professor que me incentivou nessa área. E a cada fase da graduação percebo que aprendi e avanço cada vez mais. Meus pais estudaram pouco, sabem ler e escrever, fizeram até pequena parte do Ensino Fundamental, minha mãe é diarista e meu pai operador de motosserra. Minha mãe foi a maior incentivadora, sempre se preocupou com nossa educação, em estarmos na escola, por mais que as dificuldades viessem esse objetivo nunca foi perdido. E hoje ela tem três de seus sete filhos, eu, a Vânia e Juliano, em uma Universidade Federal e o Cristiano finalizou o ensino Médio e trabalha no exército, os outros estão estudando no ensino básico, as gêmeas Alanne e Geovanna e o Jardel. Graças a ela percebi que poderia mudar nossa realidade através da educação. Observo a luta dela em criar os filhos e nos direcionar para ter uma formação.

Sou natural de Itacoatiara- AM, mas logo muito cedo viemos morar em Roraima, em uma cidadezinha no interior do estado chamada Mucajaí. Desde então dei início aos meus estudos e cursei todo o ensino básico em escolas públicas. Até o momento em que saí de Mucajaí para cursar licenciatura em Matemática na Universidade Federal de Roraima. No começo foi complicado até conseguir apoio da minha irmã Vânia que também cursa licenciatura em Matemática e ir morar junto com ela. Se distanciar de sua família e de sua zona de conforto é desafiador, mas foi necessário correr atrás das oportunidades e caminhar essa trajetória. Mas graças a Deus não estive sozinha, o apoio da família foi fundamental nesse processo, apoio também das oportunidades de auxílio e bolsas da UFRR, pois proporcionaram minha permanência no curso, além de agregar de forma significativa para minha formação.

Participei do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID), assim que ingressei na UFRR, logo muito cedo tive o contato com os alunos, com escolas. Percebi como funcionava de certa forma o futuro ambiente de atuação, experiências únicas.

Além deste, os Estágios Supervisionados também trouxeram a oportunidade de vivência na escola. Foi desafiador, agora estava como professora as atenções voltadas para mim, exige um certo cuidado com a preparação da aula, você precisa estar preparado para ensinar. Enfim, conquistar o respeito e admiração de seus alunos é extraordinário, e pude observar isso durante essas experiências na escola.

Passei uma boa temporada como secretária no Núcleo de Educação a Distância (NEaD) da UFRR, onde tive a oportunidade de aprender muito nesse setor, além de construir muitas amizades, a Universidade me trouxe muitos amigos e muitas histórias. Nesse período de tempo na Universidade, aprendi que devemos sempre colocar Deus em primeiro lugar, Deus a frente de tudo e “todas as outras coisas vão ser acrescentadas”.

A cada disciplina cursada observava a Matemática me surpreendendo, cada uma em suas particularidades. Com sugestões da minha orientadora decidimos que iríamos trabalhar sequências didáticas com o assunto de funções trigonométricas. A escolha desse conteúdo é bem relevante pois, nota-se dificuldades por parte dos alunos. E não lembro em minha época na escola ter recebido uma atenção especial nesse conteúdo. O professor sempre deve se atentar a oferecer mecanismos que proporcione um ensino-aprendizagem com resultados positivos.

O trabalho tem por objetivo trazer uma proposta das Sequências Didáticas no conteúdo de funções trigonométricas: seno, cosseno e tangente, potencializando o ensino-aprendizagem dos alunos com o auxílio do planejamento e execução de atividades selecionadas que as SD’s proporcionam.

2. CAPÍTULO TEÓRICO

Neste capítulo abordaremos o conceito de Sequência Didática, sua importância no processo de ensino e as contribuições para a formação do professor de Matemática, também, apresentaremos conceitos centrais sobre as funções trigonométricas.

2.1 SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS E FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Para se conseguir um resultado positivo no ensino e aprendizagem faz-se necessário a busca por estratégias de ensino que alcancem esse objetivo. Existe a preocupação em alcançar a todos os alunos, e planejar o que se pretende atingir é fundamental no processo de ensino. A proposta do trabalho deste TCC é utilizar as sequências didáticas como estratégia de planejamento para o ensino.

É corriqueira a pergunta: professor, mas onde irei usar isso? Torna-se necessário de fato buscar mecanismos que mostrem aos alunos a importância de cada conteúdo estudado. Muitas vezes o que se tem é a aprendizagem mecânica sem nenhum significado para os alunos, nesse sentido a elaboração de Sequências didáticas é um recurso essencial no planejamento das atividades e ensino e aprendizagem.

Mas o que é Sequência didática? “Sequência didática é um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que tem um princípio e um fim conhecidos tanto pelo professor como pelos seus alunos” (ZABALA, 1998 *apud* COSTA; GONÇALVES, 2016, p. 6).

Desse modo, sequência didática é um conjunto de atividades que estão articuladas entre si, com objetivos de aprendizagem definidos que se pretende alcançar desde o início até o fim do processo de ensino, relacionando aquilo que estou ensinando ao cotidiano do aluno ou com outros conteúdos já conhecidos, ou ainda com outras áreas do conhecimento.

É interessante notar a relação entre a sequência didática e a formação do professor de Matemática. Existe essa caracterização do Processo de Construção de Sequência Didática (PCSD) como uma “metodologia de formação de professores” é definida por Costa e Gonçalves:

> Em outras palavras o PCSD é um meio pelo qual os professores vivenciam, na prática, as contribuições teóricas relacionadas ao processo de ensino e de aprendizagem do ponto de vista da Educação Matemática, ao passo que os mesmos constroem sequências didáticas. [...]” (COSTA; GONÇALVES, 2016, p. 7).

Percebe-se diversos aspectos que contribuem para a formação do professor de Matemática, proporciona o auxílio na compreensão de cada passo no processo de ensino e interliga tais aspectos. Aspectos estes que se revelam no Processo de Construção de Sequência Didática, colaborando na formação docente.

Costa e Gonçalves (2016, p. 9-10) perceberam 12 aspectos que cooperam para que o Processo de Construção de Sequência Didática de fato seja um mecanismo na formação de professores de Matemática:

> São eles: (1) Compreensão de que o PCSD promove a Educação Matemática; (2) Compreensão de que o PCSD promove o Professor Reflexivo; (3) Compreensão de que o PCSD promove as tendências metodológicas em Educação Matemática; (4) Compreensão de que o PCSD promove a articulação com os PCN e a LDB; (5) Compreensão de que o PCSD promove a aproximação entre teoria e prática; (6) Compreensão de que o PCSD promove o professor pesquisador; (7) Compreensão de que o PCSD promove o conhecimento pedagógico geral; (8) Compreensão de que o PCSD promove o conhecimento específico do conteúdo; (9) Compreensão de que o PCSD promove o conhecimento pedagógico do conteúdo; (10) Compreensão de que o PCSD promove o conhecimento proposicional; (11) Compreensão de que o PCSD necessita de um momento teórico e prático; (12) Compreensão de que o PCSD necessita da presença e interferência do Educador Matemático (promovendo reflexões).

É importante ressaltar que o PCSD poderá ser realizado juntamente com qualquer tendência pedagógica, teorias que estão relacionadas a Educação Matemática. Neste trabalho, a proposta é realizar Sequência Didática no conteúdo de Funções Trigonométricas com o auxílio do Software Geogebra, ou seja, será interligado a Sequência Didática a tecnologia com o uso do Software.

O PCSD é relevante na formação do professor de Matemática, pois oferece condições no que diz respeito ao planejamento de ensino, como abordar cada conteúdo e seleção de atividades para o cumprimento de objetivos e pode estar vinculado a determinada tendência. É interessante notar que cada atividade tem um objetivo a alcançar e deixar claro o "como fazer" é estar interligando os aspectos práticos com a teoria, como aborda Costa e Gonçalves (2016, p. 11),

> Precisa-se repensar a formação do professor de tal forma que momentos como o PCSD sejam proporcionados aos professores em formação. Isso será produtivo tanto para os professores formadores, quanto para os formandos. Assim como, também para a própria área da Educação Matemática. É evidente a necessidade de exemplos práticos e concretos de atividades que mostram o "como fazer", tendo em vista a "tendência", teoria ou abordagem em Educação Matemática. Para nós, esse "como fazer" ficará mais claro quando os aspectos práticos estiverem em equilíbrio com os teóricos.

Falando de aspectos teóricos a seguir traremos conceitos sobre as funções trigonométricas.

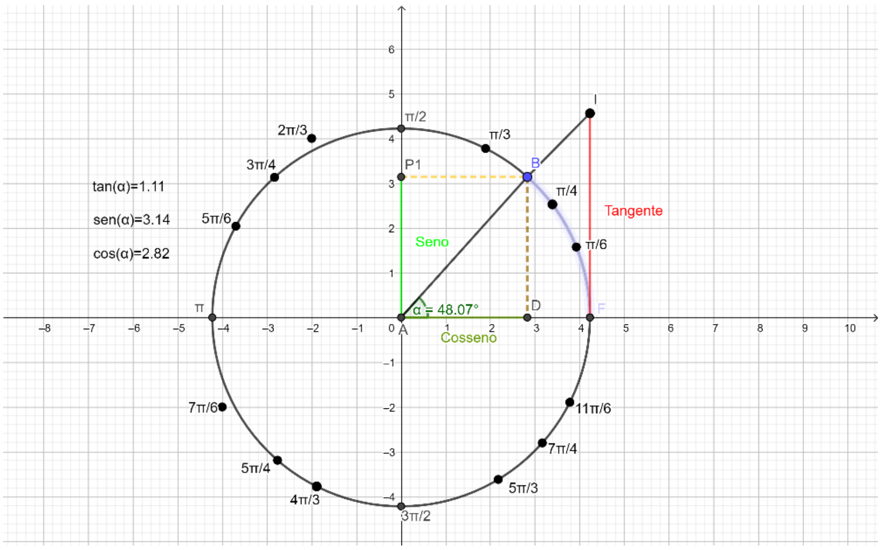
2.2 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS: SENO, COSSENO E TANGENTE

O conteúdo de funções trigonométricas é trabalhado com os alunos na 2ª série do Ensino Médio. Observa-se dificuldades por parte dos alunos na compreensão do mesmo. E buscar estratégias de ensino que solidifique a aprendizagem é fundamental. Embasados em Iezzi (2013) abordaremos conceitos sobre as funções trigonométricas, em particular Seno, Cosseno e Tangente. Por fazer parte da coleção Fundamentos de Matemática Elementar as abordagens realizadas a respeito do assunto de funções trigonométricas objetivam a formação do professor de matemática do Ensino Médio. Antes de apresentar os conceitos centrais, segue algumas definições preliminares acerca do assunto.

Função Periódica- "Uma função f: A ➞ B é periódica se existir um número p > 0 satisfazendo a condição f (x + p) = f (x), ∀x ϵ A. O menor valor de p que satisfaz a condição acima é chamado período de f." (p. 88).

Ciclo Trigonométrico- "Tomemos sobre um plano um sistema cartesiano ortogonal uOv. Consideremos a circunferência λ de centro O e raio r = 1. Notemos que o comprimento dessa circunferência é 2π, pois r = 1." (p. 88)

Figura 01- Ciclo Trigonométrico

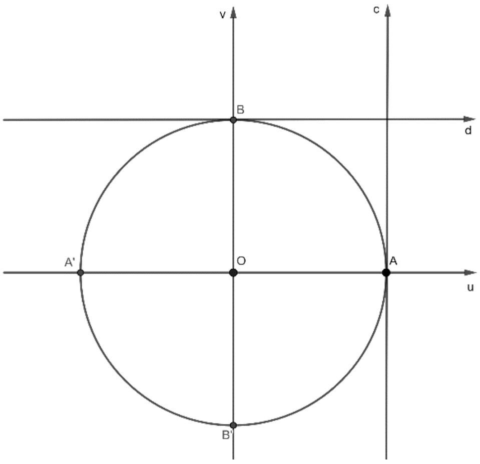


Fonte: Elaborado pela autora

A seguir a definição da função Seno, cosseno e tangente e algumas propriedades que as caracterizam:

Função Seno- "Dado um número real x, seja P sua imagem no ciclo. Denominamos seno de x (e indicamos sen x) a ordenada OP1 do ponto P em relação ao sistema uOv. Denominamos função seno a função f: ℝ ➞ ℝ que associa a cada real x o real OP1= sen x, isto é: f(x)= sen x." (p.93)

Figura 02- Quadrante



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 03- Definição de Quadrante

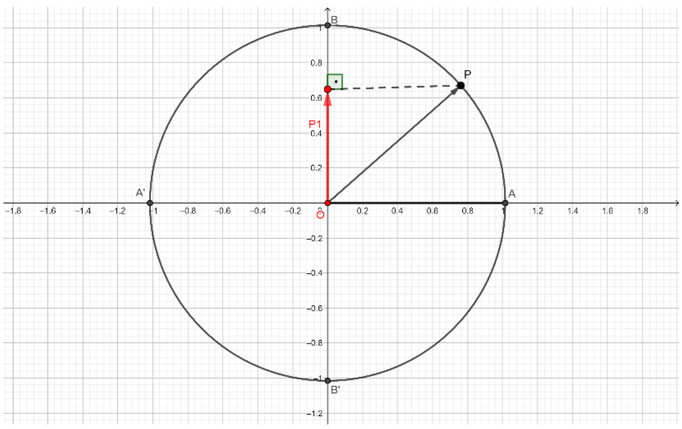
Fi

49. Os eixos *u* e *v* dividem a circunferência em quatro arcos: $\widehat{AB}$, $\widehat{BA'}$, $\widehat{A'B'}$ e $\widehat{B'A}$. Dado um número real *x*, usamos a seguinte linguagem para efeito de localizar a imagem P de *x* no ciclo:

x está no 1º quadrante $\Leftrightarrow P \in \widehat{AB}$
x está no 2º quadrante $\Leftrightarrow P \in \widehat{BA'}$
x está no 3º quadrante $\Leftrightarrow P \in \widehat{A'B'}$
x está no 4º quadrante $\Leftrightarrow P \in \widehat{B'A}$

Autor: IEZZI (2013)

Figur 04-Função seno



Fonte: Elaborado pela autora

Relembrando as propriedades da razão trigonométrica pode-se entender melhor como a função Seno se comporta:

(a) se x é do primeiro ou do segundo quadrante, então sen x é positivo;

(b) se x é do terceiro ou do quarto quadrante, então sen x é negativo;

(c) se x percorre o primeiro ou o quarto quadrante, então sen x é crescente;

(d) se x percorre o segundo ou o terceiro quadrante, então sen x é decrescente,

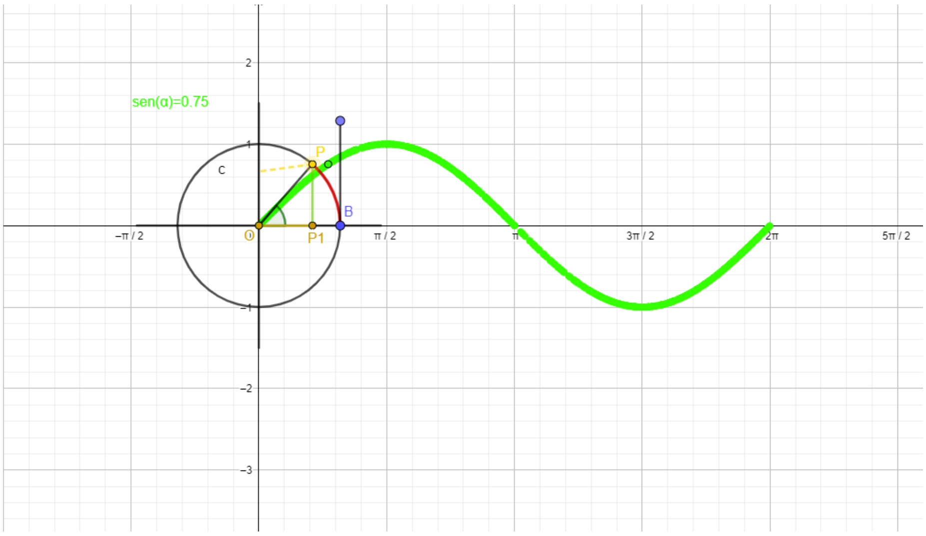
são também válidas para a função seno.

Além dessas, temos para a função seno:

1ª) A imagem da função seno é o intervalo [-1, 1], isto é, $-1 \leq$ sen x ≤ 1 para todo x real. É imediata a justificação, pois, se P está no ciclo, sua ordenada pode variar apenas de -1 a +1.

2ª) A função seno é periódica e seu período é 2π. É imediato que, se sen x = OP1 e k ϵ $\mathbb{Z}$, então sen (x + k. 2π) = OP1, pois x e x + k. 2π têm a mesma imagem P no ciclo. Temos, então, para todo x real: sen x = sen (x + k. 2π) e, portanto, a função seno é periódica. Seu período é o menor valor positivo de k. 2π, isto é, 2π (IEZZI, 2013, p. 93-94).

Figura 05- Gráfico da Função Seno

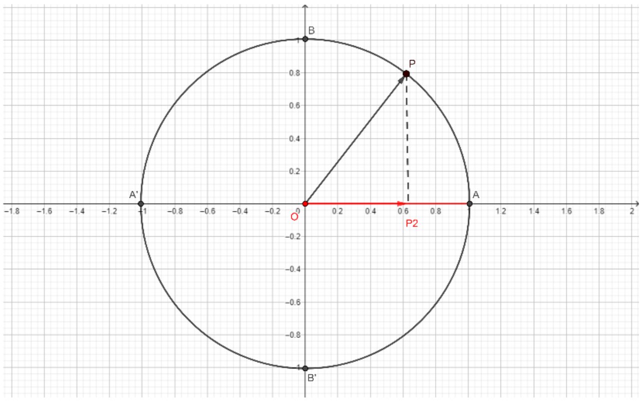


Fonte: Elaborado pela autora

Da mesma maneira vamos definir a função cosseno.

Função Cosseno- "Dado um número real x, seja P sua imagem no ciclo. Denominamos cosseno de x (e indicamos cos x) a abscissa OP2 do ponto P em relação ao sistema uOv. Denominamos função cosseno a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa a cada real x o real OP2= cos x, isto é, f(x) = cos x." (p.103)

Figura 06- Função cosseno



Fonte: Elaborado pela autora

Seguimos agora com as propriedades:

(a) se x é do primeiro ou do quarto quadrante, então cos x é positivo;

(b) se x é do segundo ou do terceiro quadrante, então cos x é negativo;

(c) Se x percorre o primeiro ou o segundo quadrante, então cos x é decrescente;

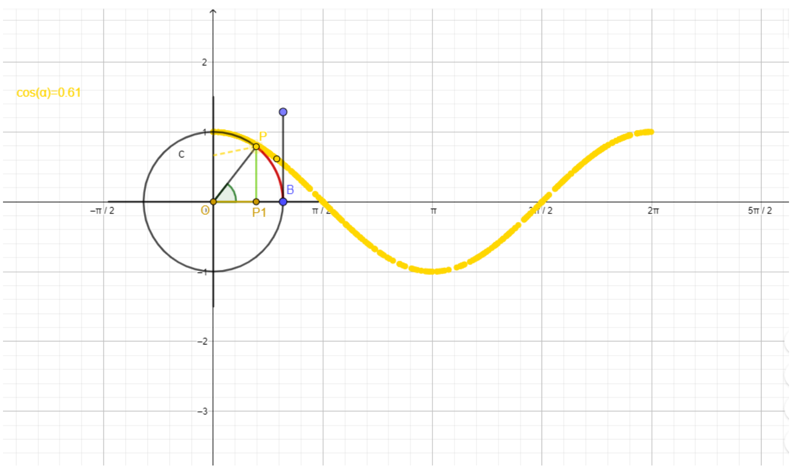
(d) se x percorre o terceiro ou o quarto quadrante, então cos x é crescente.

Além dessas, temos para a função cosseno:

1ª) A imagem da função cosseno é o intervalo [-1, 1], isto é, $-1 \leq \cos x \leq 1$ para todo x real.

2ª) A função cosseno é periódica e seu período é 2π (IEZZI, 2013, p. 103-104).

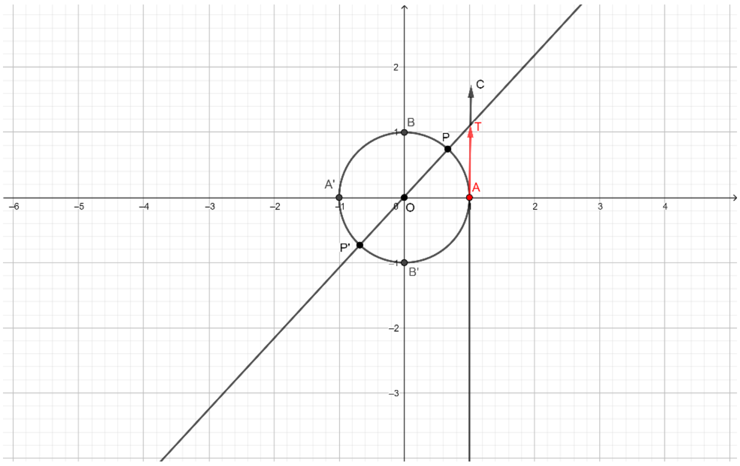
Figura 07- Gráfico da Função cosseno



Fonte: Elaborado pela autora

Função Tangente- “Denominamos função tangente a função onde D= ℝ que associa a cada real x, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, o real AT = tg x, isto é, f(x) = tg x.”

Figura 08- Função Tangente

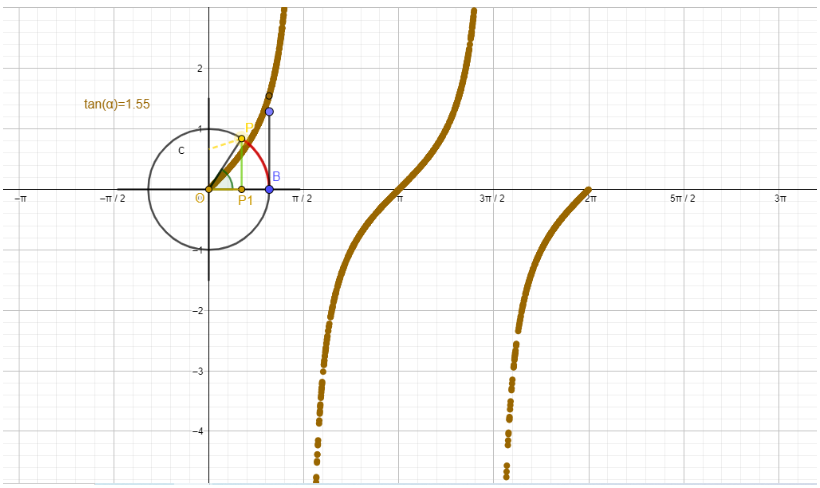


Fonte: Elaborado pela autora

Em relação as propriedades temos que:

> [...] (a) se x é do primeiro ou do terceiro quadrante, então tg x é positiva;
>
> (b) se x é do segundo ou do quarto quadrante, então tg x é negativa;
>
> (c) se x percorre qualquer um dos quatro quadrantes, então tg x é crescente, temos também para a função tangente:
>
> 1ª) O domínio da função tangente é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\}$.
>
> 2ª) A imagem da função tangente é ℝ, isto é, para todo y real existe um x real tal que tgx = y.
>
> 3ª) A função tangente é periódica e seu período é π (IEZZI, 2013, p. 106-107).

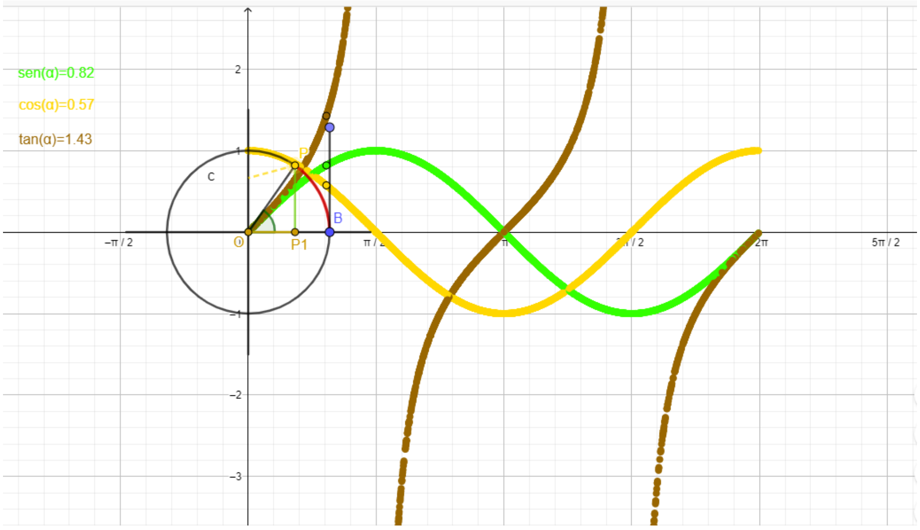
Figura 09- Gráfico Tangente



Fonte: elaborado pela autora

A seguir o gráfico com as três funções trigonométricas:

Figura 10- Gráfico da função seno, cosseno e tangente



Fonte: Elaborado pela autora

Analisamos nesse capítulo a definição de Sequência Didática e a importância na formação de professores. Permitiu-se entender com clareza a Sequência Didática como proposta de estratégia de ensino bem como a sua análise na formação do professor de Matemática, as contribuições como resultado para essa formação, também explanamos os conceitos centrais das Funções Trigonométricas, Seno, Cosseno e Tangente. No próximo capítulo exporemos a metodologia adotada para o estudo.

3.METODOLOGIA DE PESQUISA

Metodologicamente este estudo se caracteriza como pesquisa qualitativa teórica. “O pesquisador, nesse tipo de estudo, não utiliza dados ou fatos empíricos para validar uma tese ou ponto de vista, mas a construção de uma rede de conceitos e argumentos desenvolvidos com rigor e coerência logica. (FIORENTINI E LORENZATO, 2012, p.69)”. Teórica no sentido de aprofundarmos os conteúdos matemáticos de Funções Trigonométricas e na ênfase de elaborarmos SDs para esse conteúdo.

Recorremos a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) do Ensino Médio no que concerne as competências e habilidades esperadas para o ensino e aprendizagem dos conteúdos que são o foco deste trabalho: as funções trigonométricas: Seno, Cosseno e tangente. Na área da Matemática e suas Tecnologias, a BNCC traz uma proposta em relação as aprendizagens essenciais que foram trabalhadas no Ensino Fundamental no que diz respeito a ampliá-las e aprofundá-las, contemplando o aprendizado em relação a aplicação dos conteúdos ao cotidiano do aluno. A respeito do Ensino Médio a BNCC destaca-se:

> Em continuidade a essas aprendizagens, no Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, conforme anteriormente anunciado. Nesse contexto, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio, envolvidos, em diferentes graus dados por suas condições socioeconômicas, pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros [...]. (BRASIL, 2018, p. 528)

O aluno verá na prática de uma forma diferenciada a aplicação dos conceitos e por exemplo, como se comporta cada função trigonométrica e suas particularidades, para tanto a BNCC contempla o uso da tecnologia e sua importância:

> [...] A BNCC propõe que os estudantes utilizem tecnologias, como calculadoras e planilhas eletrônicas, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Tal valorização possibilita que, ao chegarem aos anos finais, eles possam ser estimulados a desenvolver o pensamento computacional, por meio da interpretação e da elaboração de algoritmos, incluindo aqueles que podem ser representados por fluxogramas. [...] Destaca-se ainda a importância do recurso a tecnologias digitais e aplicativos tanto para a investigação matemática como para dar continuidade ao desenvolvimento do pensamento computacional, iniciado na etapa anterior [...]. (BRASIL, 2018, p. 528)

Segundo essa normativa, BRASIL (2018), não existe uma determinada ordem em relação as competências, elas estão inter-relacionadas, algumas dependem do desenvolvimento de outras para se concretizar. Se esperam diante delas que os alunos desenvolvam não somente a cognição, mas também perseverança diante da busca por soluções, respeito ao trabalho e as opiniões dos colegas de turma, estando dispostos a realizar ações em grupo.

Diante da importância das competências, destaca-se as competências específicas para o ensino da Matemática e suas tecnologias para no Ensino médio:

Quadro 01: Competências para o ensino da Matemática no Ensino Médio

1.Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
2.Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
3.Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
4.Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
5.Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Fonte: Brasil (2018, p. 531)

De acordo com o BRASIL (2018) as habilidades estão de maneira interligadas com determinadas competências, contribuindo para o desenvolvimento de outras. Vale ressaltar que no Ensino Médio as habilidades nessa fase de ensino não estão organizadas por séries, flexibilizando desta forma a definição anual dos currículos e propostas pedagógicas de cada instituição de ensino médio.

A seguir destaca-se as habilidades que norteiam o conteúdo de Funções Trigonométricas, no qual objetiva se alcançar com o ensino:

(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.

(EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

Após essa análise da BNCC e dos conteúdos matemáticos delimitamos a construção de quatro SDs, com os seguintes Objeto de conhecimento:

-1ª SD: Movimentos Periódicos e Funções Trigonométricas: Seno;

- 2ª SD: Funções Trigonométricas: Cosseno;

- 3ª SD: Período das funções seno e cosseno;

- 4ª SD: Função tangente e período das funções que envolvem tangente.

Para esboçarmos as SD deste trabalho vamos utilizar uma estrutura inicial:

Quadro 02: Estrutura de uma SD

<table>
<tr><td colspan="4">SEQUÊNCIA DIDÁTICA
ENSINO MÉDIO</td></tr>
<tr><td>Profa. Xxxxx</td><td colspan="2">Turma: xxxx</td><td>Data: xxxxx
Duração: 1 aula</td></tr>
<tr><td colspan="2">Área do conhecimento: xxxxxxxxx</td><td colspan="2">Componente Curricular: xxxxxx</td></tr>
<tr><td>Unidade Temática: xxxxxx</td><td colspan="3">Objeto de conhecimento: xxxxxxx</td></tr>
<tr><td colspan="4">Habilidade (Conforme BNCC): xxxxxxxx</td></tr>
<tr><td colspan="4">Desenvolvimento:

Aula 1 – Introdução e levantamento do conhecimento prévio

Elaborar quantas atividades forem necessárias, com foco em situações que podem ser exploradas para relacionar o conteúdo a ser ministrado com o cotidiano e os conteúdos já estudados pelos alunos.
Aula 2,3...n – Conteúdo a ser trabalhado

Elaborar quantas atividades forem necessárias.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Recursos: Mencionar os recursos a serem utilizados de acordo com cada atividade proposta.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Avaliação: Utilizar diversas possibilidades avaliativas por exemplo: Observação e registro das interações durante as aulas, produções individuais e em grupo, seminário e prova escrita.</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pela autora

A seguir apresentamos as SD’s construídas para este estudo.

4. AS SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS PARA FUNÇÕES SENO, COSSENO E TANGENTE

A proposta das sequências didáticas para o ensino-aprendizagem de Trigonometria no Ensino Médio nos faz refletir em como esse ensino se desenvolve, quais estratégias estão sendo utilizadas pelos professores para alcançar resultados positivos. Diante disso, é de imediato pensar nas dificuldades de aprendizagem dos alunos. É interessante notar que nós que passamos por essa fase de estudo desse conteúdo, muitas vezes nos deparamos com alguns entraves que são vestígios da nossa formação escolar, Nascimento (2013, p. 4) se refere a isto destacando algumas dificuldades no ensino-aprendizagem da trigonometria:

> É sabido que algumas dificuldades apresentadas são originadas também de limitações conceituais dos professores, oriundas de sua formação escolar e de sua formação acadêmica (inicial e continuada), que de certa forma reflete em seu exercício. Algumas delas são: transição da trigonometria do triângulo retângulo para a do ciclo trigonométrico; distinção entre arcos e ângulos; tratar simultaneamente as razões e relações trigonométricas de grandezas angulares medidas em graus e as razões e relações trigonométricas de grandezas de medidas lineares medidas em radianos, sem perceber a importância de entender e diferenciar tais situações, as quais ajudarão na compreensão das funções trigonométricas[...].
> As maiores dificuldades apresentadas pelos alunos dão-se no estudo analítico da trigonometria, e uma delas é a não diferenciação que antes, no triângulo retângulo tinha um significado e agora apresenta outro foco. Evidencia-se exercícios mecânicos nas resoluções de equações e inequações com nenhuma contextualização, não familiarização com as fórmulas, dificuldade na interpretação de situações problemas, como também ênfase em atividades relacionadas a identidades trigonométricas.

Nascimento (2013) questiona o porquê é tão difícil ensinar-aprender a Trigonometria e apresenta três percepções acerca desse questionamento. A primeira refere-se a “distribuição curricular”, está atrelada ao fato do professor conseguir passar todos os conteúdos destinados para aquele ano letivo, muitas vezes gerando uma correria com os conteúdos. A segunda percepção é a “necessidade de integração entre os conteúdos” e por fim, uma terceira percepção é a “falta de significado do conteúdo”, o porquê de se estudar determinado conteúdo, onde encontro no meu cotidiano, todos esses questionamentos os alunos fazem.

É necessário colocar importância no conteúdo abordado, no sentido de trazer o aluno a observar que aquele conteúdo se manifesta dessa forma no seu dia a dia, na sua realidade. Trazendo para o conteúdo foco, levar o aluno a observar que a frequência de seus batimentos cardíacos pode ser representada de forma aproximada por uma função trigonométrica é algo bem interessante.

E na verdade o que encontramos muitas vezes são aulas mecânicas, onde o professor repassa conteúdos e o aluno reproduz as regras, fórmulas. É preciso nesse processo de ensino, onde se irá adentrar em conteúdos mais avançados, realizar o diagnóstico da turma. Desta maneira o professor terá uma vista a que ponto abordará ao introduzir o novo assunto. É importante notar que os alunos possuem conhecimentos prévios diante dos conteúdos e na sequência didática é essencial resgatar tais conhecimentos já vistos em séries anteriores. Diante disso, é interessante ressaltar o conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP):

> ...É a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes. (VYGOTSKY, 1984a: 97 *apud* ALVES, 2005).

É importante notar como a turma se encontra, no que diz respeito ao conteúdo já estudado e como o professor poderá agir diante desses resultados:

> A avaliação diagnóstica concentra-se em colocar em evidência os aspectos fortes e fracos de cada aluno, sendo possível determinar o ponto adequado de entrada em uma sequência de ensino, cuja contribuição não é voltada à nota, mas um diagnóstico para compreender o processo da produção do conhecimento. (FIORENTINE; LORENZATO, 2012 *apud* BRUM, 2015, p.189)

Brum (2015) alerta a respeito de se ter um ensino somente transmissivo, ressalta a importância da aplicação de avaliação diagnóstica, pois é a partir disso que filtrará o que o aluno já tem conhecimento e então envolvê-los em situações que irão, como ele se refere, confrontar o que foi aprendido com os novos conhecimentos daquele conteúdo que está sendo trabalhado.

A seguir veremos as sequências Didáticas para o conteúdo de Funções Trigonométricas, nas quais se encontram detalhadas a respeito da escolha de cada atividade. É importante que cada atividade tenha um objetivo a alcançar nos alunos, essa é uma característica das sequências didáticas. Após a apresentação da SD faremos algumas exposições sobre nossas escolhas.

Quadro 3: SD Movimentos periódicos e Função Seno

<table>
<tr><td colspan="6" align="center">SEQUÊNCIA DIDÁTICA
ENSINO MÉDIO</td></tr>
<tr><td colspan="2">Prof.ª Joana Dourado</td><td colspan="2">Turma: 2ª Série</td><td colspan="2">Data: xx/xx/xxxx
Duração: 2 aulas</td></tr>
<tr><td colspan="3">Área do conhecimento: Área de Matemática e suas tecnologias</td><td colspan="3">Componente Curricular: Matemática</td></tr>
<tr><td colspan="2">Unidade Temática: Números e álgebra</td><td colspan="4">Objeto de conhecimento: Movimentos periódicos e Funções Trigonométricas: Seno</td></tr>
<tr><td colspan="6">Habilidade (Conforme BNCC): (EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.</td></tr>
</table>

Desenvolvimento:

Aula 1 – Introdução e levantamento do conhecimento prévio

Objetivo da aula- Analisar situações e fenômenos que apresentam movimento periódico, despertando a curiosidade.

Apresentar Arcos da Lapa-RJ, Representação de ondas sonoros, Frequência cardíaca.

Figura 11- Situações que expressam movimentos periódicos

Fonte: https://www.elsevier.es/es-revista-revista-andaluza-medicina-del-deporte-284-articulo-frequencia-cardiaca-e-sua-variabilidade-X1888754610478033

Também será recordado com os alunos os conceitos a respeito do assunto de movimentos periódicos vistos na Física, destacando aqui a interdisciplinaridade.

Com essas situações os alunos irão perceber que os movimentos periódicos se manifestam em diversas situações no cotidiano, o que de fato interessante, fazer essa associação entre a Matemática e o cotidiano do aluno.

Atividade 01- Trabalho em grupo: Pesquisa na internet sobre fenômenos representados por movimentos periódicos. Os alunos podem selecionar vídeos, imagens, ou elaborar apresentação verbal.

Nesta atividade os alunos irão interagir em grupos, verificar o número de alunos na classe, realizando pesquisa sobre os movimentos periódicos reforçando o conhecimento acerca do conteúdo. Cada grupo deve apresentar o resultado de sua pesquisa, explicando qual foi o fenômeno que encontrou e como ele funciona. Desta forma, será reforçado os conceitos e introduzindo assim o assunto de funções periódicas.

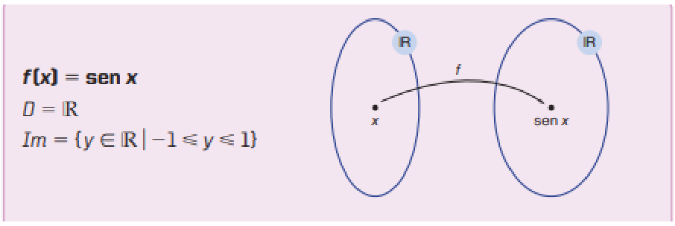
Aula 02- Gráfico da Função Seno

Apresentar o objetivo da aula- Identificar a função Seno e suas representações gráficas.

Após a introdução sobre os movimentos periódicos, comunicar aos alunos que iremos estudar várias funções que se comportam de forma periódica, e a primeira dela será a função seno.

Identificando a Função Seno:

Figura 12- Função seno



Fonte: PAIVA (2010)

A medida x rad associada a um ponto da circunferência trigonométrica pode ser identificada com o número real x. Assim, a cada número real x podemos associar um único sen x.

- **Características do gráfico**

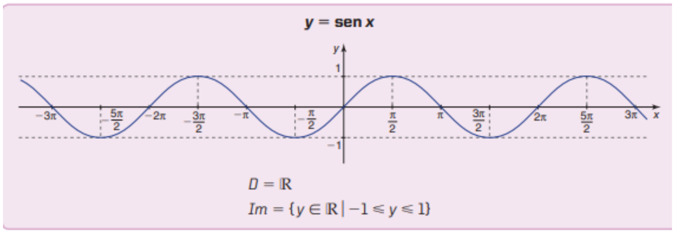
-A função seno é periódica e seu período é 2π, isso porque o gráfico é formado pela repetição da curva obtida quando x assume todos os valores de uma volta completa da circunferência trigonométrica.

- O menor número positivo p que satisfaz essa condição é chamado de período da função y= sen x. Como se observa, nesse caso, o menor número p é 2π.

-Observe que a função seno é ímpar, pois seu gráfico é simétrico em relação à origem do sistema de eixos, isto é, sen (-x) = -sen x para qualquer número real x.

X	Y
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
$\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$	$\mathbf{3}$
$\boldsymbol{\pi}$	$\mathbf{0}$
$\boldsymbol{\frac{3\pi}{2}}$	$\mathbf{-3}$
$\boldsymbol{2\pi}$	$\mathbf{0}$

Figura 13- Gráfico Função Seno



Fonte: PAIVA (2010)

Atividade 02- Objetivo é a construção do gráfico da função seno, será destacado o passo a passo para construí-lo. Exemplos:

Esboçar o gráfico da função y= 3 sen x.

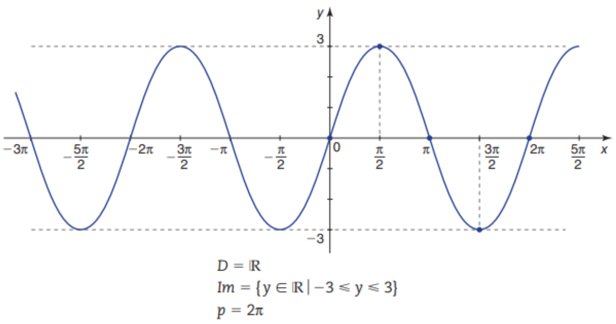
Para esboçar o gráfico, construímos uma tabela, atribuindo à variável x alguns valores e calculando os correspondentes valores de y. Aqui, atribuímos a x somente valores positivos, mas poderíamos ter atribuído também valores negativos, já que o domínio da função seno é ℝ.

Veja como calculamos, por exemplo, o valor de y quando $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2}}$:

$$\boldsymbol{y = 3 * sen\frac{\pi}{2} = 3 * 1 = 3}$$

Marcando no plano cartesiano os pontos obtidos nas respectivas coordenadas, temos:

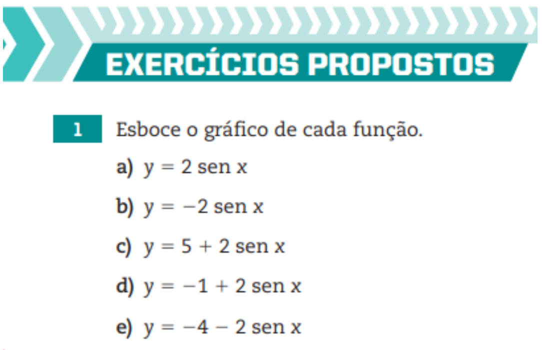
Figura 14- Construção da Função Seno



Fonte: Paiva (2010)

Atividade 03- O esperado é que o aluno coloque em prática o que aprendeu. A sugestão é a aplicação dos exercícios propostos da página 168-169 do livro didático de Paiva (2010), com o auxílio da malha quadriculada:

Figura 15- Exercícios propostos



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 Esboce o gráfico de cada função.

a) $y = 2 \text{ sen } x$

b) $y = -2 \text{ sen } x$

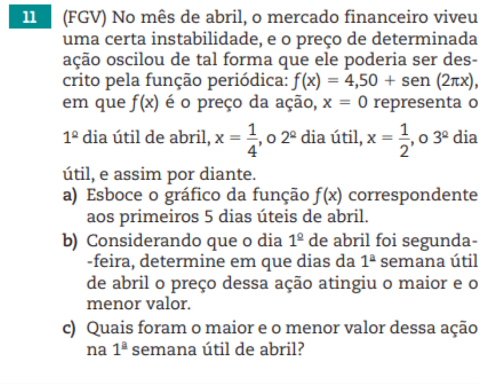
c) $y = 5 + 2 \text{ sen } x$

d) $y = -1 + 2 \text{ sen } x$

e) $y = -4 - 2 \text{ sen } x$

Fonte: Paiva (2010)

Figura 16- Exercícios propostos



11 (FGV) No mês de abril, o mercado financeiro viveu uma certa instabilidade, e o preço de determinada ação oscilou de tal forma que ele poderia ser descrito pela função periódica: $f(x) = 4{,}50 + \text{sen}\,(2\pi x)$, em que $f(x)$ é o preço da ação, $x = 0$ representa o 1º dia útil de abril, $x = \frac{1}{4}$, o 2º dia útil, $x = \frac{1}{2}$, o 3º dia útil, e assim por diante.

a) Esboce o gráfico da função $f(x)$ correspondente aos primeiros 5 dias úteis de abril.

b) Considerando que o dia 1º de abril foi segunda-feira, determine em que dias da 1ª semana útil de abril o preço dessa ação atingiu o maior e o menor valor.

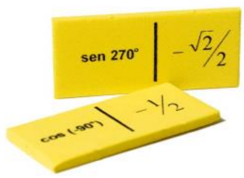
c) Quais foram o maior e o menor valor dessa ação na 1ª semana útil de abril?

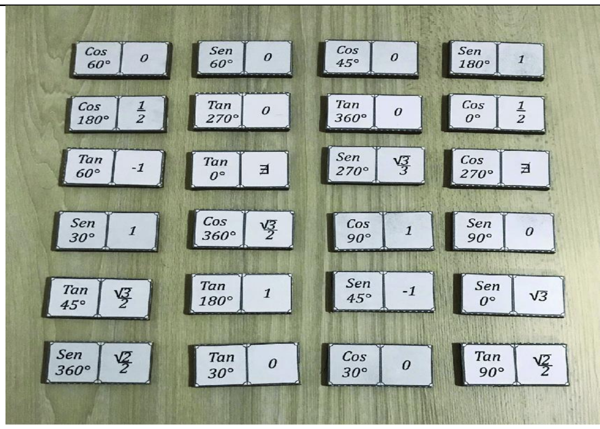
Fonte: Paiva (2010)

Atividade 04- Construção do Dominó trigonométrico[1]

Propor que a turma construa o Dominó trigonométrico, cada aluno pode construir duas ou três peças, de forma que ao final a turma tenha um dominó para utilizar e praticar. Com esse jogo os alunos irão explorar melhor o ciclo trigonométrico, observando a cada partida os valores de seno, cosseno e tangente, nos respectivos graus.

[1] Imagens disponíveis em https://mmpmateriaispedagogicos.com.br/produto/jogo-trigomino/ e https://www.researchgate.net/figure/Figura-1-Pecas-do-domino-trigonometrico-Fonte-Autoras-2020_fig11_349948614





Recursos: Livro didático, malha quadriculada, materiais reciclados, caneta e papel.

Avaliação: Observação e registro das interações durante as aulas, produções individuais e em grupo/ seminário.

Referências: Matemática: Paiva/ Manoel Rodrigues Paiva.2ª Ed- São Paulo: Moderna Plus, 2010.

Uma abordagem do ensino de funções trigonométricas por meio de atividades interdisciplinares / Sandro Rogério de Abreu Duarte Filho. – Campos dos Goytacazes, 2017.

Essa primeira SD trata a respeito da função Seno e suas representações gráficas. Note que é preciso logo de início realizar a motivação para se adentrar ao conteúdo proposto. Nesta é destacado os movimentos periódicos nos quais as funções trigonométricas representam e torna-se instigante fazer associação com o cotidiano do aluno, isto é, onde o movimentos periódicos se manifestam e quais suas aplicações. É importante sempre trazer próximo a realidade dos alunos na qual se está inserido.

É compartilhado aos alunos fotos de monumentos e construções, isso faz refletir onde mais na minha cidade, estado ou bairro posso encontrar algo parecido. A proposta da próxima atividade vem para desafiá-los numa pesquisa sobre movimentos periódicos, encontrarão diversos exemplos que até então não tinham conhecimento da particularidade da periodicidade. A sugestão é que essa atividade seja feita em grupo, pois os alunos irão compartilhar ideias e poderão aprender juntos.

É importante fazer a introdução e levantamento do conhecimento prévio para assim então seguir com as sequências didáticas. Em relação aos conhecimentos prévios Brum (2015, p. 189) afirma:

> Nessa linha de pensamento, a Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel configura-se como adequada e harmoniosa, por privilegiar os conhecimentos prévios dos alunos antes da aplicação de uma sequência de ensino, a forma de organização de um conteúdo obedecendo o processo de diferenciação progressiva e reconciliação

> integrativa e a valorização da avaliação formativa e processual, entendendo a aprendizagem como contínua e progressiva.

Se faz necessário esse levantamento pois os conteúdos estão interligados. Nessa sequência observa-se a interdisciplinaridade com a Física, o que é relevante pois, nos permite observar que o conteúdo se expande para outras áreas de conhecimento. Os alunos estudam o conteúdo de movimentos periódicos na Física na 1ª série do Ensino Médio, desta forma ampliarão o aprendizado.

Mais à frente temos as definições de função seno e sua representação gráfica com algumas características destacadas, todas referentes ao livro didático. Mostrando os passos necessários para se construir um gráfico da função seno. Os alunos nesse momento resgatarão o aprendizado sobre plano cartesiano e ciclo trigonométrico. No decorrer do trabalho ressaltamos definições do livro de Iezzi (2013) que é voltado para a formação de professores e também do livro didático do Paiva (2010). E por fim, fica a sugestão de atividades do livro didático para a construção de gráficos no qual o aluno terá o apoio da malha quadriculada no desenrolar e além disso uma atividade contextualizada trazendo uma representação da função seno no mercado financeiro. O que é importante pois o aluno vai enxergando onde aquele conteúdo está se aplicando em sua vida cotidiana. Ainda nessa aula, é motivado aos alunos a construção de material concreto que auxiliará no aprendizado o Dominó Trigonométrico. Uma visita ao laboratório de informática para realizar a construção no Geogebra está sendo vislumbrada, porém após a introdução de mais funções.

Quadro 4- SD Função Cosseno

<table>
<tr><td colspan="3">SEQUÊNCIA DIDÁTICA
ENSINO MÉDIO</td></tr>
<tr><td>Prof.ª Joana Dourado</td><td>Turma: 2ª Série</td><td>Data: xxxxx
Duração: 2 aulas</td></tr>
<tr><td colspan="2">Área do conhecimento: Área de Matemática e suas tecnologias</td><td>Componente Curricular: Matemática</td></tr>
<tr><td>Unidade Temática: Números e Álgebra</td><td colspan="2">Objeto de conhecimento: Funções Trigonométricas: Cosseno</td></tr>
<tr><td colspan="3">Habilidade (Conforme BNCC): (EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Desenvolvimento:

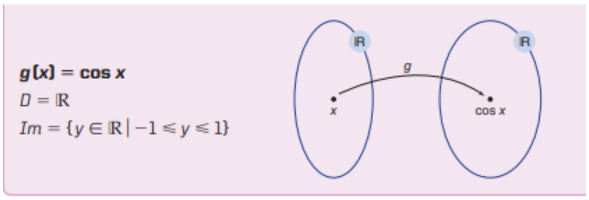
Aula 1 – Introdução e levantamento do conhecimento prévio

Atividade 01- Apresentar o objetivo da aula e despertar nos alunos curiosidade.</td></tr>
</table>

Nesta aula vamos estudar a respeito de como podemos identificar a função cosseno e estudar suas representações gráficas. Podendo até mesmo fazer comparações com a função seno e analisando as particularidades entre elas, indagando aos alunos qual seria a diferença entre elas. Desta forma percebemos a atitude dos alunos em relação a identificar cada uma das funções.

Identificando a Função Cosseno:

Figura 17- Função Cosseno

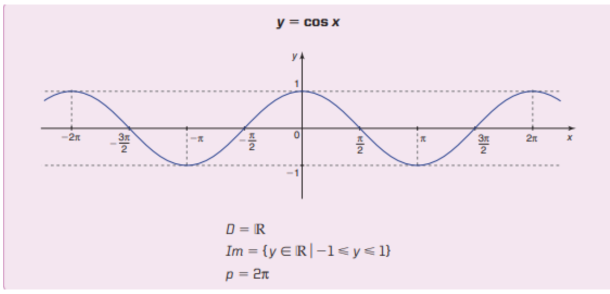


Fonte: PAIVA (2010)

A medida x rad associada a um ponto da circunferência trigonométrica pode ser identificada com o número real x. Assim, a cada número real x podemos associar um único cos x.

O gráfico da função Cosseno

Figura 18- Gráfico da Função Cosseno



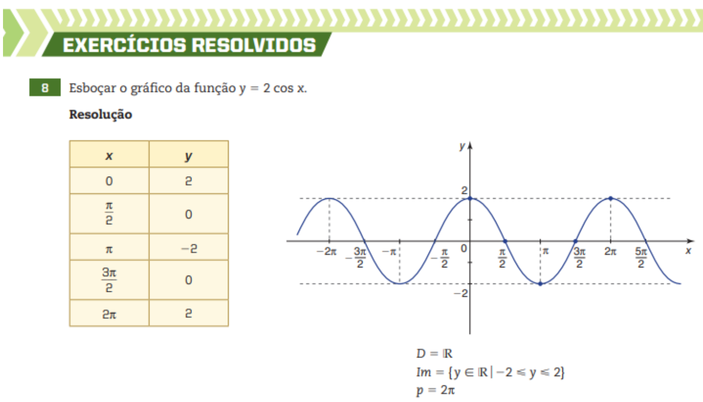
Fonte: Paiva (2010)

Observe que a função cosseno é par, pois seu gráfico é simétrico em relação ao eixo das ordenadas, isto é,

cos (-x)= cos x para qualquer número real x.

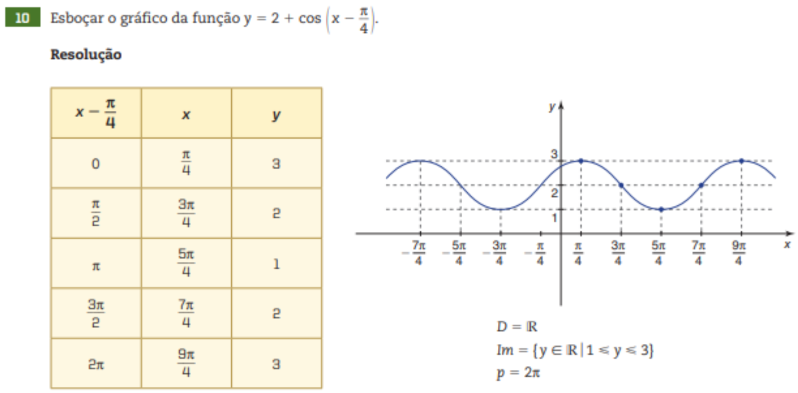
Atividade 02- Objetivo é a construção do gráfico da função cosseno, será demonstrado o procedimento para construí-lo. Exemplo:

Figura 19- Exercícios resolvidos



Fonte: Paiva (2010)

Figura 20- Exercícios resolvidos



10 Esboçar o gráfico da função $y = 2 + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Resolução

$x - \frac{\pi}{4}$	x	y
0	$\frac{\pi}{4}$	3
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	2
π	$\frac{5\pi}{4}$	1
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2
2π	$\frac{9\pi}{4}$	3

$D = \mathbb{R}$

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leq y \leq 3\}$

$p = 2\pi$

Fonte: Paiva (2010)

Para esboçar o gráfico, construímos uma tabela, atribuindo à variável x alguns valores e calculando os correspondentes valores de y. Aqui, atribuímos a x somente valores positivos, mas poderíamos ter atribuído também valores negativos, já que o domínio da função cosseno é ℝ.

Dessa forma os alunos podem construir o jogo e levá-lo para casa. Os alunos jogarão em duplas.

Atividade 03-Resolva a seguinte situação:

Figura 21- Pressão Arterial

Fonte:https://1.bp.blogspot.com/4U5R06_gKJg/XW28HWKiDsI/AAAAAAAAIi8/1DXeeybM3rUpBcAiFsTWs4E-pu6YBvQXACLcBGAs/s1600/heartbeat-2418733_640.jpg

(ENEM 2017) Um cientista, em seus estudos para modelar a pressão arterial de uma pessoa, utiliza uma função do tipo P (t) = A + B cos (kt) em que A, B e K são constantes reais positivas e t representa a variável tempo, medida em segundo. Considere que um batimento cardíaco representa o intervalo de tempo entre duas sucessivas pressões máximas.

Ao analisar um caso específico, o cientista obteve dos dados:

Pressão mínima	78
Pressão máxima	120
Número de batimentos cardíacos por minuto	90

A função P(t) obtida, por este cientista, ao analisar o caso específico foi:

Resolução:

A função P (t) = A + B cos (kt) representa um ciclo de repetições com máximos e mínimos em função do cosseno que varia entre +1 e -1.

Analisando o problema: O valor máximo é encontrado quando cos=1 ficando 120=A+B e o mínimo quando cos=-1 ficando 78= A-B. Somando as duas equações membro a membro, obtemos o valor de A e com essa informação utilizando nas equações encontramos o valor de B.

A = Média entre ponto máximo e ponto mínimo, ou seja, A = 99
B = (ponto máximo - ponto mínimo) / 2 = (120 - 78) /2 = 21

Para encontrarmos o valor de k, vamos usar as batidas por minuto informadas no enunciado. Foram 90 batidas por minuto. Para encontrarmos as batidas por segundo, basta dividir por 60, já que 1 minuto tem 60 segundos. Sendo assim,

Frequência = 90 / 60 batidas cardíacas por segundo
Frequência = 1,5 batidas cardíacas por segundo

Como o período é o inverso da frequência, então temos que o intervalo entre as batidas é 1/1,5 = 2/3 segundos.

A cada 2/3 segundos, o ciclo se repete. Podemos igualar

$$\cos(kt) = \cos(2\pi)$$
$$k.\ 2/3 = 2\pi$$
$$k/3 = \pi$$
$$k = 3\pi$$

Portanto a função será P(t)= 99 + 21 cos (3πt)

- **A seguir a resolução mais detalhada do problema, utilizando sistemas:**

$$\begin{cases} \boldsymbol{A+B=120} & \text{-Quando o cos for 1} \\ \boldsymbol{A-B=78} & \text{- Quando o cos for -1} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, usando o método da adição temos, o B cancelado:

$$\boldsymbol{2A = 198}$$
$$\boldsymbol{A = \frac{198}{2} = 99}$$

Para encontrarmos o valor de B basta pegarmos $\boldsymbol{A+B=120}$

$$\boldsymbol{B = 120 - 99}$$
$$\boldsymbol{B = 21}$$

Agora precisamos calcular o valor da frequência: $\boldsymbol{f = \frac{90}{60} = \frac{3}{2}}$, e como o período é o inverso da frequência temos o valor de $\boldsymbol{\frac{2}{3}}$.

Relembrando: O período é dado como $\boldsymbol{P = \frac{2\pi}{K}}$ $\quad$ $\boldsymbol{Portanto\ \frac{2}{3} = \frac{2\pi}{K}\ \ K = 3\pi}$

Logo temos função: $\boldsymbol{P(t) = 99 + 21cos(3\pi t)}$

Atividade 04- Na malha quadriculada resolva os exercícios do livro didático Paiva (2010, p. 168):

$\boldsymbol{d)\ y = cos4x}$

$\boldsymbol{e)\ y = 1 - 2\ cos2x}$

$\boldsymbol{f)\ y = 2cos(x - \frac{\pi}{2})}$

$\boldsymbol{g)\ y = -2 + cos(2x - \frac{\pi}{4})}$

Atividade 05- Interações no Geogebra:

Utilize as funções da atividade anterior para observar como cada gráfico se comporta no Geogebra. Será apresentado aos alunos o Software Geogebra como ferramenta auxiliar no aprendizado. De início será passado a eles os comandos básicos e necessários para se trabalhar o conteúdo de funções trigonométricas. Desta forma teremos aulas mais dinâmicas em busca da interação dos alunos e os mesmos irão aprender de maneira diferenciada através da tecnologia o conteúdo matemático. **Aula 02- Correção dos exercícios** Nesta aula será trabalhada a correção dos exercícios propostos, podendo sanar as possíveis dúvidas e questionamentos dos alunos.
Recursos: Dominó Trigonométrico, malha quadriculada, livro didático e Software Geogebra.
Avaliação: Observação e registro das interações durante as aulas, produções individuais e em grupo.
Referências: https://www.google.com/url?sa=i&url=https%3A%2F%2Fwww.facebook.com%2Feivocesabia&psig=AOvVaw3TpJ6AdGAJuGexpVZEu8s-&ust=1645816126349000&source=images&cd=vfe&ved=0CAsQjRxqFwoTCPDpiqOHmfYCFQAAAAAdAAAAABAE **https://www.elsevier.es/es-revista-revista-andaluza-medicina-del-deporte-284-articulo-frequencia-cardiaca-e-sua-variabilidade-X1888754610478033** **https://1.bp.blogspot.com/-4U5R06_gKJg/XW28HWKiDsI/AAAAAAAAIi8/1DXeeybM3rUpBcAiFsTWs4E-pu6YBvQXACLcBGAs/s1600/heartbeat-2418733_640.jpg** Matemática: Paiva/ Manoel Rodrigues Paiva.2ª Ed- São Paulo: Moderna Plus, 2010.

Chegamos a segunda Sequência Didática, nesta tratamos à respeito da função cosseno. Na primeira ação da sequência propomos a definição, como identificar a função cosseno e suas representações gráficas. É detalhado como esboçar o gráfico, construímos uma tabela, atribuindo à variável x alguns valores e calculando os correspondentes valores de y. Os exemplos foram tirados do livro didático, exploramos as ideias do mesmo.

Na atividade 03, temos uma situação problema, trazendo a função cosseno aplicada a frequência cardíaca. A resolução dessa atividade apresenta a forma para se chegar a função, fazendo a média aritmética entre ponto máximo e o ponto mínimo e logo depois faz-se o detalhamento com o uso dos sistemas. Na atividade 04, usamos o livro didático com atividades bem interessantes e desta vez com o apoio da malha quadriculada. Já na atividade 05, será apresentado aos alunos o [2] Software Geogebra, que aprenderão comandos básicos para

[2] O GeoGebra é um software de matemática dinâmica gratuito e **multiplataforma** para todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo numa única aplicação. Tem recebido vários

desenvolver e analisar os resultados dos exercícios da atividade anterior. Destacamos aqui o uso da tecnologia e estratégias de ensino e sua contribuição para com o ensino. Nesta atividade o objetivo é fixar os conceitos e buscar a interação dos alunos através do Software.

E por fim, temos uma aula destinada a correções, vamos tirar as possíveis dúvidas e questionamentos dos alunos. Ela se faz importante pois o aluno tem a oportunidade de fixar melhor algo que não tenha alcançado ainda e o professor fará uma espécie de "avaliação" geral e saberá como está o nível da turma diante desse conteúdo.

Podemos contemplar os seguintes elementos nesta sequência didática: o uso da tecnologia- a proposta é direcionar os estudantes ao laboratório de informática para desenvolver as atividades no Software Geogebra. A princípio os alunos aprenderão comandos básicos, irão de fato conhecer a ferramenta e as principais funções para se desenvolver o aprendizado neste conteúdo. Apresentamos também a prática de situações problema, nesta o aluno é desafiado a buscar formas de resolução, além disso, contamos também com situações problemas que destacam a relação entre o conteúdo matemático e o cotidiano do aluno. Apresentamos a necessidade de se utilizar a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) no que se refere as habilidades e competências esperadas no estudante.

Quadro 5- SD Período das funções seno e cosseno

<table>
<tr><td colspan="4">SEQUÊNCIA DIDÁTICA
ENSINO MÉDIO</td></tr>
<tr><td>Profa. Joana Dourado</td><td colspan="2">Turma: 2ª Série</td><td>Data: xxxxx
Duração: 2 aulas</td></tr>
<tr><td colspan="2">Área do conhecimento: Área da Matemática e suas tecnologias</td><td colspan="2">Componente Curricular: Matemática</td></tr>
<tr><td>Unidade Temática: Números e Álgebra</td><td colspan="3">Objeto de conhecimento: Período das funções seno e cosseno</td></tr>
<tr><td colspan="4">Habilidade (Conforme BNCC): (EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Desenvolvimento:

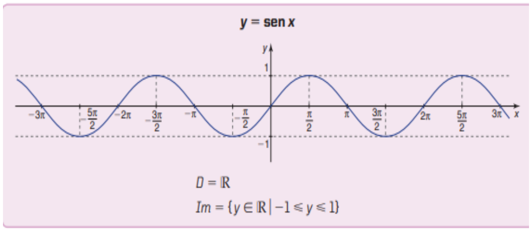
Aula 1 – Apresentar o objetivo da aula, dando continuidade ao conteúdo:

Nesta o objetivo é analisar as funções seno e cosseno segundo sua periodicidade, sinal, raízes e conjunto imagem.</td></tr>
</table>

prêmios na Europa e EUA. O GeoGebra foi criado em 2001 como tese de Markus Hohenwarter e a sua popularidade tem crescido desde então. (https://www.pucsp.br/geogebrasp/geogebra.html)

Iniciamos a aula lembrando aos alunos que as funções seno e cosseno representam movimentos periódicos, pediremos aos alunos para relembrarem alguns movimentos que eles descobriram em suas pesquisas. A seguir destacamos que vamos estudar agora que período é esse, ou seja, qual o intervalo em que estas funções repetem seus movimentos? Para ilustrar mostramos o gráfico de uma função seno, e a seguir lançamos questionamentos:

Figura 22- Gráfico função seno



Fonte: Paiva (2010)

O que vocês observam nesse gráfico?

Esperar que os alunos percebam certas características da função como: tem uma parte do gráfico que se repete; a função está entre 1 e -1, etc Caso eles não percebam isso, motivar com questionamentos mais direcionados.

Após esse momento frisar a questão do período da função seno de forma intuitiva e então formalizar como se obtém o período de uma função.

Figura 23- Período das funções seno e cosseno

Período das funções seno e cosseno

Obtemos o período da função $y = a + b \cdot \text{sen}\,(mx + q)$ ou da função $y = a + b \cdot \cos\,(mx + q)$, em que $\{a, b, m, q\} \subset \mathbb{R}$, com $b \neq 0$ e $m \neq 0$, fazendo a medida $(mx + q)$ assumir todos os valores reais associados a uma volta completa da circunferência trigonométrica. Por exemplo, quando essa medida assume os valores de 0 a 2π, temos:

$$0 \leq mx + q \leq 2\pi \Rightarrow 0 - q \leq mx \leq 2\pi - q$$

(I) Se $m > 0$:

$$-q \leq mx \leq 2\pi - q \Rightarrow -\frac{q}{m} \leq x \leq \frac{2\pi - q}{m}$$

O período p da função é a diferença entre o maior e o menor valor obtidos para x, nessa ordem, isto é:

$$p = \frac{2\pi - q}{m} - \left(-\frac{q}{m}\right) \Rightarrow p = \frac{2\pi}{m}$$

(II) Se $m < 0$:

$$-q \leq mx \leq 2\pi - q \Rightarrow -\frac{q}{m} \geq x \geq \frac{2\pi - q}{m}$$

Calculando o período p:

$$p = -\frac{q}{m} - \frac{2\pi - q}{m} \Rightarrow p = -\frac{2\pi}{m}$$

Por (I) e (II), concluímos que:

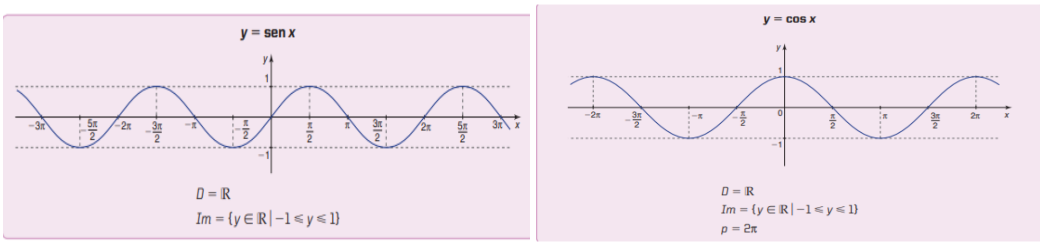
$$\boxed{p = \frac{2\pi}{|m|}}$$

Fonte: Paiva (2010)

Essa definição de período das funções seno e cosseno é destacada no livro didático do autor Paiva (2000) e é interessante notar que é apresentado como chegamos na fórmula do período. Se faz importante mostrar o processo, não faria tanto significado assim se somente repassasse à eles uma fórmula pronta. A partir disso, os alunos irão ter uma base sobre periodicidade destas funções consolidando esse conceito melhor nos exemplos trabalhados e atividades propostas.

Aula 01 continuidade- O objetivo dessa aula é analisar gráficos quanto ao domínio, imagem e periodicidade das funções e trabalhar o período seguindo a fórmula:

Figura 24- Período das Funções seno e cosseno



Fonte: Paiva (2010

Note que o gráfico é formado pela repetição da curva obtida quando x assume todos os valores de uma volta completa da circunferência trigonométrica; por isso dizemos que a função seno e cosseno são periódicas e que seu período é 2π. Observa-se que o período é o menor intervalo em que acontece a repetição dos valores da função.

Os gráficos são definidos para qualquer valor que se tenha para x, isto é, todos os ângulos possuem um sen (x) e cos (x) nos casos acima. Logo, o domínio das funções é D(f)= ℝ.

A imagem é o conjunto de todos os valores possíveis para a função. Observando ambos os gráficos percebe-se que nem todos os valores do eixo das ordenadas são seno ou cosseno de algum ângulo, isto é, os únicos valores que podem ser representados com o valor do seno e cosseno estão nesse intervalo de -1 até 1, pois observamos que não temos nenhum valor para sen x ou cos x maior que 1 e nenhum valor para ambos menor que -1, ou seja o gráfico não ultrapassa nesse intervalo.

Outros exemplos:

Figura 25- Exercícios propostos

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

14 Determinar o período das funções:

a) $y = 3 \text{ sen } 2x$

b) $y = 2 + 6 \cos(-4x)$

c) $y = 2 \text{ sen } \frac{x}{3}$

d) $y = 3 - 4 \cos\left(\pi x + \frac{\pi}{5}\right)$

Resolução

a) $p = \frac{2\pi}{|2|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

b) $p = \frac{2\pi}{|-4|} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

c) $p = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{3}\right|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$

d) $p = \frac{2\pi}{|\pi|} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

Fonte: Paiva (2010)

Nesta vemos alguns exemplos de funções aplicando a fórmula do período.

Atividade 01- Responda os seguintes exercícios da pág. 169 questões 3 e 4 do livro didático, com o auxílio do Geogebra, registre os gráficos justificando cada período e imagem e apresente os resultados do período utilizando também a fórmula.

Figura 26- Exercícios propostos

3 Determine o período das funções.

a) $y = 8 \text{ sen } x$

b) $y = \text{sen } 8x$

c) $y = \text{sen } \frac{x}{8}$

d) $y = \cos(-3x)$

e) $y = 2 + 3 \text{ sen}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$

f) $y = 2 + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right)$

4 Obtenha o conjunto imagem de cada uma das funções.

a) $y = 10 \text{ sen } x$

b) $y = -10 \text{ sen } x$

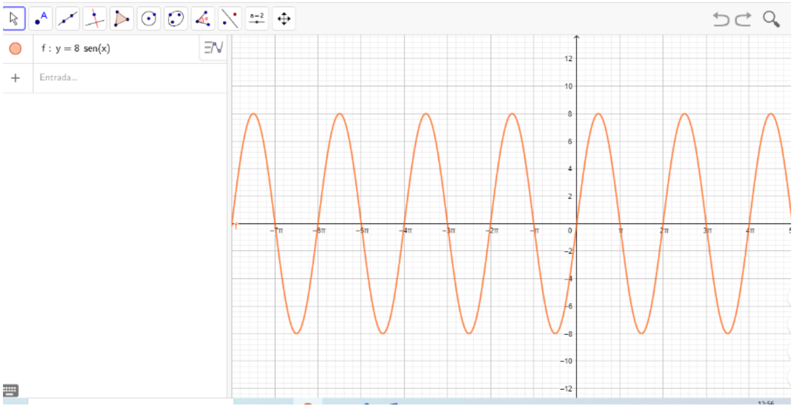
c) $y = 3 + 2 \cos x$

d) $y = -4 + 5 \cos \frac{x}{2}$

Fonte: Paiva (2010)

Com essa atividade os alunos irão visualizar graficamente com o auxílio do Geogebra, os períodos e imagens das respectivas funções das atividades propostas. A ida ao laboratório de informática é algo diferenciado pois os alunos irão visualizar de uma forma diferente o conteúdo estudado a partir do Software.

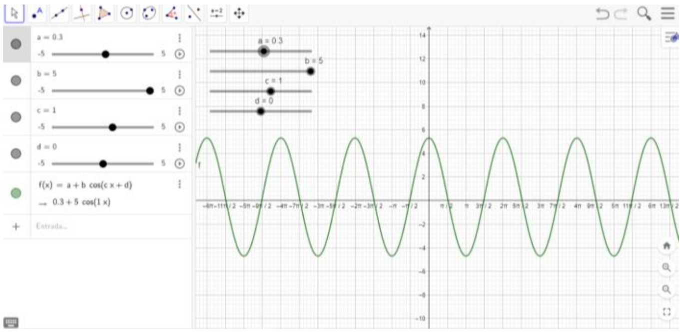
Figura 27- Questão 3.A- Exercícios propostos



Fonte: Elaborado pela autora

Atividade 02- Interações no Geogebra:

Figura 28- Exercício proposto



Fonte: Elaborado pela autora

Responda as seguintes perguntas em relação ao gráfico da função f(x)= a+b.cos(cx+d) em que a= 0.3, b= 5, c= 1, d= 0

1-Altere o valor de "a" e observe o gráfico. O que acontece com o gráfico?

a) Translada no sentido horizontal
b) Translada no sentido vertical
c) Muda a amplitude
d) O gráfico "comprime" ou "estica"

2- Altere o valor de "b" e observe o gráfico. O que acontece com o gráfico?

e) Translada no sentido horizontal
f) Translada no sentido vertical
g) Muda a amplitude
h) O gráfico "comprime" ou "estica"

3- Altere o valor de "c" e observe o gráfico. O que acontece com o gráfico?

a) Translada no sentido horizontal
b) Translada no sentido vertical
c) Muda a amplitude
d) O gráfico "comprime" ou "estica" no sentido horizontal

4- Altere o valor de "d" e observe o gráfico. O que acontece com o gráfico?

e) Translada no sentido horizontal
f) Translada no sentido vertical
g) Muda a amplitude
h) O gráfico "comprime" ou "estica" no sentido horizontal

5- Altere o valor de "a" e observe o gráfico. O que acontece com o domínio, imagem e o período da função?

a) O conjunto imagem muda, mas o domínio e o período não.
b) O domínio, a imagem e o período mudam.
c) O período aumenta ou diminui.
d) Não acontece nada com o domínio, imagem e período.

6- Volte o valor de "a" para 0. Altere o valor de "b" e observe o gráfico. O que acontece com o domínio, imagem e o período da função?

a) O conjunto imagem muda, mas o domínio e o período não.
b) O domínio, a imagem e o período mudam.
c) O período aumenta ou diminui.
d) Não acontece nada com o domínio, imagem e período.

7- Volte o valor de "a" para 0 e "b" para 1. Altere o valor de "c" e observe o gráfico. O que acontece com o domínio, imagem e o período da função?

a) O conjunto imagem muda, mas o domínio e o período não.
b) O domínio, a imagem e o período mudam.
c) O período aumenta ou diminui.
d) Não acontece nada com o domínio, imagem e período.

8- Volte o valor de "a" para 0, "b" para 1 e "c" para 1. Altere o valor de "d" e observe o gráfico. O que acontece com o domínio, imagem e o período da função?

e) O conjunto imagem muda, mas o domínio e o período não.
f) O domínio, a imagem e o período mudam.

g) O período aumenta ou diminui. h) Não acontece nada com o domínio, imagem e período. Nesta atividade os alunos farão interações no Geogebra a respeito da função cosseno. Analisarão a influência dos parâmetros no comportamento do gráfico e a influência nos parâmetros no domínio, imagem e período da função. Isso permitirá um melhor entendimento aos alunos para fazerem essas análises gráficas através do Software. **Aula 02-** Correção dos exercícios- Nesta aula será analisada cada atividade passada, analisaremos o desenvolvimento dos alunos quanto ao aprendizado do período, domínio e imagem das funções seno e cosseno, será sanada algumas dúvidas que restarem.
Recursos: Livro didático, Software Geogebra.
Avaliação: Observação e registro das interações durante as aulas, produções individuais.
Referências: https://youtu.be/eYlAckCbDLA Matemática: Paiva/ Manoel Rodrigues Paiva.2ª Ed- São Paulo: Moderna Plus, 2010. **https://www.geogebra.org/m/g2g3mYaU**

Essa Sequência didática trata à respeito do período das funções seno e cosseno. A princípio realizamos uma motivação intuitiva buscando construir uma base cognitiva para formalização matemática. Destacamos o conceito do livro didático, que está explicativo pois mostra como se chegou a fórmula do período, o que é bem interessante pois, é importante mostrar aos alunos o processo das fórmulas, não somente repassar e repassar fórmulas prontas.

Na atividade 02 trabalharemos os gráficos das funções seno e cosseno, o foco dessa atividade está em o aluno ser capaz de identificar a imagem, o domínio e fazer a resolução do período utilizando a fórmula. São conceitos cruciais e que devem estar claros para os alunos. Na próxima atividade, sugerimos exercícios do livro didático em parceria com o uso do Geogebra. Aqui o aluno irá plotar esses gráficos e fazer uma análise justificando o que seria a imagem, domínio e período.

E por fim, temos a atividade 04, com interações no Geogebra. Esses parâmetros serão feitos com controles deslizantes no Geogebra. É dada uma função aos alunos, irão gerar controles deslizantes podendo o aluno alterar cada valor da função. Observe que são feitas algumas perguntas induzindo o aluno a fazer as mudanças de valores e a observar como o gráfico se comporta. É uma atividade que levará a interação e sobretudo firmará alguns conceitos.

Observa-se nessa sequência didática que os elementos contemplados são o uso do livro didático e do Software Geogebra. O livro didático é muito importante nesse processo não podemos descarta-lo. Precisamos de um ensino que traga resultados positivos para nossos alunos e muitas vezes o que predomina é a aula do tipo mecânica. O livro didático precisa ser um aliado para o professor, além disso, relacionar os conteúdos com diferentes estratégias de ensino é essencial. Desta forma o uso do Geogebra traz novas possibilidades de aprendizagem para os estudantes.

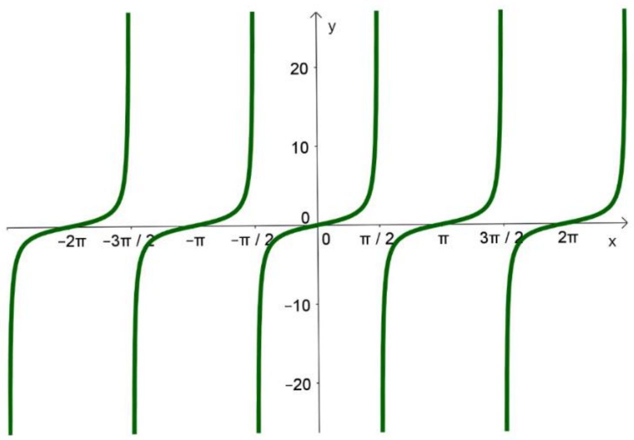
Quadro 6- Função tangente e período

<table>
<tr><td colspan="4" align="center">SEQUÊNCIA DIDÁTICA
ENSINO MÉDIO</td></tr>
<tr><td>Profa. Joana Dourado</td><td colspan="2">Turma: 2ª Série</td><td>Data: xxxxx
Duração: 2 aulas</td></tr>
<tr><td colspan="2">Área do conhecimento: Área da Matemática e suas tecnologias</td><td colspan="2">Componente Curricular: Matemática</td></tr>
<tr><td>Unidade Temática: Números e Álgebra</td><td colspan="3">Objeto de conhecimento: Função tangente e período das funções que envolvem tangente.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Habilidade (Conforme BNCC): (EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Desenvolvimento:

Aula 1 – Apresentar o objetivo da aula e fazer ligação com as funções seno e cosseno

Motivar os alunos no sentido de que a função tangente é mais uma função trigonométrica e que tem a ver com o seno e o cosseno de um número, também destacar que ela possui algumas particularidades diferentes da função seno e cosseno, apresentar um gráfico elementar da função tangente e pedir para os alunos apontarem o que eles percebem de diferente nessa função. Aguardar as manifestações que podem ocorrer como o gráfico ser vertical, ou o gráfico não ser contínuo etc.

Figura 29- Gráfico Função tangente



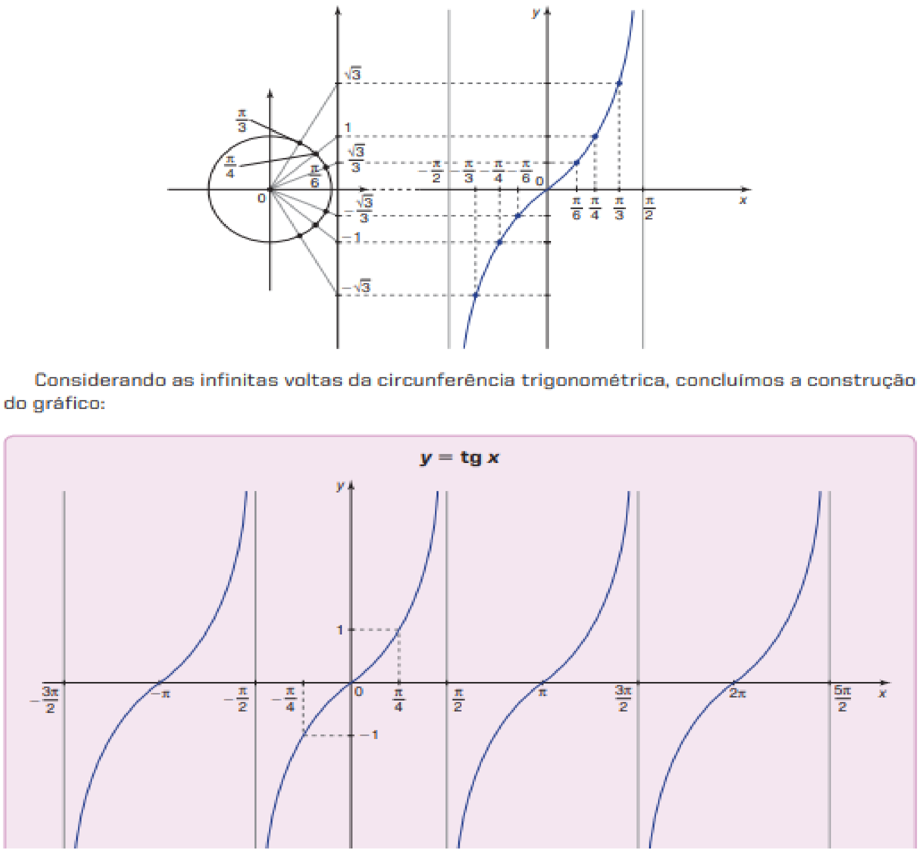
Fonte: https://escolaeducacao.com.br/funcoes-trigonometricas/</td></tr>
</table>

Definição: Função Tangente

A função tangente é a função que associa a cada número real x, com $\boldsymbol{x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi}$ e $\boldsymbol{k \epsilon \mathbb{Z}}$, um único número real y tal que: $\boldsymbol{y = tgx}$

Identificar as funções tangente e suas representações gráficas:

Figura 30- Gráfico Função tangente



Fonte: Paiva (2010)

Características do gráfico da função tangente:

- As retas verticais que passam pelos pontos de abscissa ..., $\boldsymbol{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}}$, ... não têm ponto comum com o gráfico. E, quando x se aproxima indefinidamente de uma dessas retas, a distância entre essa reta e o gráfico tende a zero. Essas retas são chamadas assíntotas verticais do gráfico.
- Na função y= tg x, a variável x pode assumir qualquer valor real tal que $\boldsymbol{x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi}$, com $\boldsymbol{k \epsilon \mathbb{Z}}$. Logo o domínio D dessa função é:

$$\boldsymbol{D = \left\{ x \epsilon \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{com } k \in \mathbb{Z} \right\}}$$

- Como tg x pode assumir qualquer valor real, o conjunto imagem ($\boldsymbol{Im}$) da função y = tg x é: $\boldsymbol{Im} = \mathbb{R}$.
- O gráfico se repete a cada comprimento π no eixo Ox, ou seja, tg (x+π)= tg x; logo, a função tangente é periódica de período $\boldsymbol{p = \pi}$, pois π é o menor valor positivo $\boldsymbol{p}$ tal que tg (x+p)= tg x.

Atividade 01- O objetivo dessa atividade é analisar a construção de gráficos quanto ao domínio e imagem da função tangente:

Figura 31- Exercícios propostos

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

18 Determinar o domínio *D* e o conjunto imagem *Im* da função y = tg 3x.

Resolução

Sabemos que $\text{tg } 3x = \frac{\text{sen } 3x}{\cos 3x}$; logo, a condição de existência dessa função é $\cos 3x \neq 0$ e, portanto:

$3x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$, com $k \in \mathbb{Z}$

Então, o domínio da função é o conjunto $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, \text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

Como tg 3x pode assumir qualquer valor real, concluímos que o conjunto imagem da função $Im = \mathbb{R}$.

Fonte: Paiva (2010)

20. Esboçar o gráfico da função $\boldsymbol{tg(\frac{\pi}{2} - x)}$

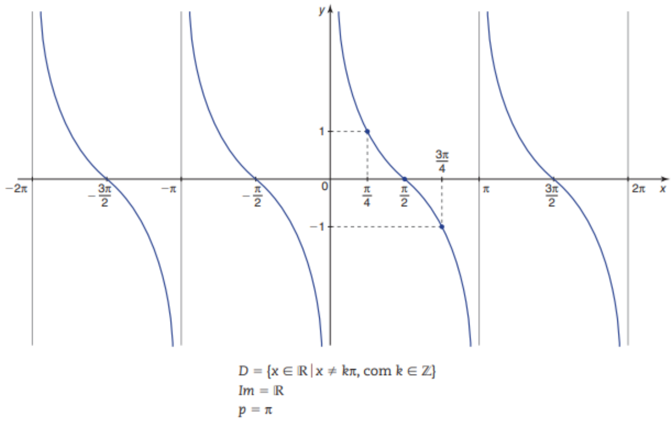
Resolução: ∄

Para esboçar o gráfico de um período dessa função, podemos atribuir ao arco $\boldsymbol{\frac{\pi}{2} - x}$ os valores $\boldsymbol{-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}}$ ***e*** $\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$., obtendo os correspondentes valores de x e y:

$\frac{\pi}{2} - x$	x	y
$-\frac{\pi}{2}$	Π	∄
$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	-1
0	$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	1
$\frac{\pi}{2}$	0	∄

Assim, com base na repetição do período considerado na tabela, temos o gráfico:

Figura 32- Gráfico Função Tangente



Fonte: Paiva (2010)

Atividade 02- Nesta atividade o objetivo é analisar cada função segundo sua periodicidade, sinal, raízes e conjunto imagem.

Diferentemente do período das funções seno e cosseno o período das funções que envolvem tangente se comporta da seguinte maneira:

Figura 33- Período função tangente

Período de funções que envolvem tangente

Determinamos o período da função $y = a + b \cdot \text{tg}\,(mx + q)$, com $\{a, b, m, q\} \subset \mathbb{R}$, $b \neq 0$ e $m \neq 0$, fazendo a medida $(mx + q)$ assumir todos os valores reais associados à meia-volta da circunferência trigonométrica, pois, a cada meia-volta, a função tangente assume todos os valores de sua imagem $\mathbb{R}$. Por exemplo, quando essa medida assume os valores reais do intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, temos:

$$-\frac{\pi}{2} < mx + q < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} - q < mx < \frac{\pi}{2} - q$$

(I) Se $m > 0$:

$$-\frac{\pi}{2} - q < mx < \frac{\pi}{2} - q \Rightarrow \frac{-\frac{\pi}{2} - q}{m} < x < \frac{\frac{\pi}{2} - q}{m}$$

O período p da função é a diferença entre o maior e o menor extremo do intervalo acima, nessa ordem:

$$p = \frac{\frac{\pi}{2} - q}{m} - \left(\frac{-\frac{\pi}{2} - q}{m}\right) = \frac{\pi}{m}$$

(II) Se $m < 0$:

$$-\frac{\pi}{2} - q < mx < \frac{\pi}{2} - q \Rightarrow \frac{-\frac{\pi}{2} - q}{m} > x > \frac{\frac{\pi}{2} - q}{m}$$

Calculando o período p:

$$p = \frac{-\frac{\pi}{2} - q}{m} - \left(\frac{\frac{\pi}{2} - q}{m}\right) = -\frac{\pi}{m}$$

Por (I) e (II), concluímos que:

$$\boxed{p = \frac{\pi}{|m|}}$$

Fonte: Paiva (2010)

Exemplos:

Figura 34- Exemplos

EXERCÍCIO RESOLVIDO

22 Determinar o período das funções:

a) $y = \text{tg}\,4x$ b) $y = 5\,\text{tg}\,(-2x)$ c) $y = 6 + 4\,\text{tg}\left(\frac{\pi}{7} - 3x\right)$

Resolução

Aplicando a fórmula $p = \frac{\pi}{|m|}$, temos:

a) $p = \frac{\pi}{|4|} = \frac{\pi}{4}$ b) $p = \frac{\pi}{|-2|} = \frac{\pi}{2}$ c) $p = \frac{\pi}{|-3|} = \frac{\pi}{3}$

Fonte: Paiva (2010)

Os exemplos mostram como encontrar o período das funções que envolvem tangente, a seguir teremos uma atividade para colocar em prática o aprendizado até então.

Atividade 03- Nesta atividade é proposto a resolução por parte dos alunos dos exercícios da página 184 do livro didático. Os alunos poderão utilizar o software Geogebra no auxílio desta atividade.

Figura 35- Exercícios propostos

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

17 Determine o domínio e o conjunto imagem de cada função.

a) $y = \operatorname{tg} 4x$

b) $y = 5 \operatorname{tg} \frac{3x}{2}$

c) $y = 4 + \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{5}\right)$

18 Esboce o gráfico das funções.

a) $y = \operatorname{tg} 4x$

b) $y = -\operatorname{tg} 4x$

c) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

19 Calcule o período de cada função.

a) $y = \operatorname{tg} 6x$

b) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{6}$

c) $y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$

Fonte: Paiva (2010)

Aula 02- O objetivo desta aula é realizar a correção dos exercícios- Será analisada cada atividade passada, analisaremos o desenvolvimento dos alunos quanto ao aprendizado do período, domínio e imagem das funções que envolvem tangente, serão sanadas algumas dúvidas que restarem.

Recursos: Laboratório de informática, livro didático e Software Geogebra.

Avaliação: Observação e registro das interações durante as aulas, produções individuais e em grupo.

Referências: Matemática: Paiva/ Manoel Rodrigues Paiva.2ª Ed- São Paulo: Moderna Plus, 2010.

Essa é nossa última SD, sobre função tangente e período da tangente. Resolvemos unir esses dois assuntos pois período de funções foi estudado na SD anterior, logo os alunos já terão uma base a respeito. Na primeira atividade os alunos aprenderão a identificar a função tangente e suas representações gráficas. Será apresentado a definição e características do gráfico da função tangente. Essa segunda atividade levará os alunos a reconhecerem nas representações gráficas a imagem e o domínio das funções tangente, o aluno construirá o gráfico seguindo os passos com a tabela, enfim. Analisarão o comportamento dos gráficos da função tangente. É realizado o estudo do período da função tangente, também é destacado o percurso para se chegar na fórmula e é trabalhado alguns exemplos do livro didático.

Na terceira atividade é como se fosse um resumo do que foi estudado acerca de funções tangente. Com o auxílio do Geogebra os alunos poderão resolver exercícios que trabalhem a questão de identificar e construir gráficos, o domínio, imagem e período da função. Mais uma vez proporcionando a ida ao laboratório de informática, a interação dos alunos com o Geogebra, o que poderá consolidar os conceitos trabalhados em torno das funções trigonométricas. E ainda associando o uso Software Geogebra com o livro didático, comentou-se a importância na sequência anterior.

Neste capítulo apresentamos as SD’s construídas para este estudo com relação as funções Seno, Cosseno e Tangente. Nossa perspectiva é que ao aplicar a SD’s pode-se avaliar e aprimorar cada etapa.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo objetivou apresentar Sequências Didáticas (SD's) para o ensino de funções trigonométricas: seno, cosseno e tangente. Apresentamos a definição de SD e a importância na formação do professor de matemática. Foi possível observar alguns aspectos para a formação do professor de Matemática, aspectos estes que se revelam no Processo de Construção de Sequência Didática, colaborando na formação docente. Com base no livro de Gelson Iezzi destacamos alguns conceitos acerca do conteúdo, ressaltamos que essa obra objetiva a formação dos professores de Matemática do Ensino Médio, desta forma fizemos esse paralelo com o livro didático. Contemplamos uma breve análise da Base Nacional Comum Curricular em relação as competências e habilidades esperadas para o ensino e aprendizagem dos conteúdos das funções trigonométricas. Apresentamos quatro SD's desenvolvendo aulas com o conteúdo de Funções trigonométricas. Destacou-se ainda a respeito do ensino de trigonometria no Ensino Médio e algumas dificuldades que professores e alunos enfrentam.

Diante do estudo é notória a importância das sequências Didáticas para o ensino. Pois é uma ferramenta que irá de fato conduzir o professor ao planejamento e execução das aulas. Essa experiência na construção e aprofundamento das SD's sem dúvidas contribuiu para minha formação. Existe uma preocupação em que tipo de aula, de ensino vou oferecer aos meus alunos e o que é interessante nas SD's é que consigo medir isto, é possível traçar um roteiro de atividades, mas não qualquer atividade. É preciso escolher com cuidado, pois cada uma objetiva algo a alcançar nos alunos.

Que esse trabalho possa auxiliar muitos professores na busca por oferecer um ensino que traga resultados positivos, além de auxiliar nas dificuldades encontradas para o ensino de Funções Trigonométricas e a partir dele desenvolver novas perspectivas e ideias que contribuam para o ensino- aprendizagem da Matemática.

REFERÊNCIAS

ALVES, José Moysés. As formulações de Vygotsky sobre a zona de desenvolvimento proximal. Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, v. 1, p. 12, jun. 2005. ISSN 2317-5125. Disponível em: <https://periodicos.ufpa.br/index.php/revistaamazonia/article/view/1466/1869>. Acesso em: 04 mar. 2022. doi: http://dx.doi.org/10.18542/amazrecm.v1i0.1466.

BRASIL. Ministério da educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, DF, 2018.

BRUM, Wanderley Pivatto. Sequências didáticas no ensino de matemática: uma investigação com professores de séries finais em relação ao tema Teorema de Pitágoras. São Paulo, 2015. p.189.

COSTA, Dailson Evangelista; GONÇALVES, Tadeu Oliver. O processo de construção de sequência didática como (pro)motor da educação matemática na formação de professores. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, XII, São Paulo 2016, São Paulo. Anais do XII Encontro Nacional de Educação Matemática – ISSN 2178-034X. São Paulo: 2016. p. 7-11.

FIORENTINI, Dario.; LORENZATO, Sergio. Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos. 3.ed.rev- Campinas, SP: Autores Associados, 2012.

IEZZI, Gelson. Fundamentos de matemática elementar.3. São Paulo: atual, 2013. 311 p.

NASCIMENTO, Maurício Alves. Ensino-aprendizagem de trigonometria: Explorando e resolvendo problemas. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, XI, 2013, Curitiba. Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática – ISSN 2178-034X. Curitiba: 2013. p. 4.

PAIVA, Manoel Rodrigues. Matemática Paiva. 2. Edição. São Paulo: Moderna, 2010. 575 p.