



UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JAMER XAVIER RODRIGUES JUNIOR

UM ESTUDO SOBRE A CURVATURA GAUSSIANA DE SUPERFÍCIES REGULARES

Boa Vista, RR

2022

JAMER XAVIER RODRIGUES JUNIOR

UM ESTUDO SOBRE A CURVATURA GAUSSIANA DE SUPERFÍCIES REGULARES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Roraima - UFRR, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof^a. Dr^a. Kelly Karina Santos

Coorientador: Prof. Dr. Elzimar de Oliveira Rufino

Boa Vista, RR

2022

Dados Internacionais de Catalogação Na Publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal de Roraima

R696e Rodrigues Junior, Jamer Xavier.

Um estudo sobre a curvatura gaussiana de superfícies regulares
/ Jamer Xavier Rodrigues Junior . – Boa Vista, 2022.
52 f. : il.

Orientadora: Profa. Dra. Kelly Karina Santos.

Coorientador: Prof. Dr. Elzimar de Oliveira Rufino.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade
Federal de Roraima, Curso de Licenciatura em Matemática.

1 – Curvatura Gaussiana. 2 – Superfície Regular. 3 –
Geometria Diferencial. I – Título. II – Santos, Kelly Karina
(orientadora). III – Rufino, Elzimar de Oliveira (coorientador).

CDU – 514.7

JAMER XAVIER RODRIGUES JUNIOR

UM ESTUDO SOBRE A CURVATURA GAUSSIANA DE SUPERFÍCIES REGULARES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Roraima - UFRR, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Licenciado em Matemática. Defendida em 14 de dezembro de 2022 e avaliada pela seguinte banca examinadora.

Documento assinado digitalmente
 KELLY KARINA SANTOS
Data: 23/12/2022 20:34:42-0300
Verifique em <https://verificador.iti.br>

Prof^ª. Dr^ª. Kelly Karina Santos
Orientadora - UFRR

Documento assinado digitalmente
 LINDEVAL FERNANDES DE LIMA
Data: 23/12/2022 20:52:03-0300
Verifique em <https://verificador.iti.br>

Prof. Dr. Lindeval Fernandes de Lima
Membro/DMAT-UFRR

Documento assinado digitalmente
 MAX FERREIRA
Data: 23/12/2022 19:49:29-0300
Verifique em <https://verificador.iti.br>

Prof. Dr. Max Ferreira
Membro/DMAT-UFRR

Boa Vista, RR
2022

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus pela realização deste sonho.

Aos meus pais, Jamer Rodrigues e Suzana Guerra, por nunca, mesmo com dificuldades, medirem esforços para que todos os seus filhos tenham condições de estudar. Esta conquista está encharcada pelo suor desses dois heróis. À vocês, minha eterna gratidão. Os amo muito.

Aos meus irmãos, que são muitos, pelo carinho, apoio, incentivo e auxílio sempre que precisei. Em especial, agradeço aos meus irmãos Jerry Rodrigues e Kennedy Rodrigues pelos conselhos e por me acolherem em etapas diferentes desta jornada. À Milena Rodrigues, Jamer Rodriguez (outro irmão com mesmo nome) e Marta Vanessa por serem o alívio nos momentos tensos deste curso.

À minha companheira Jessica Torquato, que me conheceu como aluno de engenharia elétrica e terminou com um professor de matemática, mas que em todos os momentos sempre esteve ao meu lado e apoiou minhas decisões. À você querida também dedico esta conquista.

À minha orientadora Kelly Karina Santos, que admiro como pessoa e me espelho como professor, por suas orientações, ensinamentos, sua dedicação e seu empenho em todos os trabalhos que realizamos.

Ao meu coorientador Elzimar de Oliveira Rufino, que contribuiu de forma substancial para a realização deste trabalho.

Por fim, aos professores do DMAT-UFRR, aos amigos e colegas que contribuíram para realização deste objetivo.

RESUMO

A Curvatura Gaussiana, grosso modo, mede quão rapidamente uma superfície regular se afasta do plano tangente num ponto dado. Como este conceito é local, em geral seu valor varia em cada ponto da superfície, no entanto, o Teorema Egregium de Gauss nos mostra que este conceito é intrínseco, ou seja, não depende do espaço ambiente na qual a superfície se encontra. Neste trabalho, reunimos o cálculo das expressões gerais da curvatura Gaussiana de superfícies regulares clássicas. Além disso, apresentamos um estudo sobre o comportamento da curvatura Gaussiana destas superfícies, mais precisamente, investigamos se existem pontos onde a curvatura Gaussiana é máxima ou mínima, pontos onde ela é positiva ou negativa e pontos onde ela é nula.

Palavras-chave: Curvatura Gaussiana. Superfície Regular. Geometria Diferencial.

ABSTRACT

Gaussian curvature, roughly speaking, measures how quickly a regular surface moves away from the tangent plane at a given point. As this concept is local, in general its value varies at each point of the surface, however, the Egregious Theorem of Gauss shows us that this concept is intrinsic, that is, it does not depend on the ambient space in which the surface is located. In this final paper, we gather the calculation of the general expressions of the Gaussian curvature of classical regular surfaces. In addition, we present a study on the behavior of the Gaussian curvature of these surfaces, more precisely, we investigate whether there are points where the Gaussian curvature is maximum or minimum, points where it is positive or negative and points where it is zero.

Key-words: Gaussian Curvature. Regular Surface. Differential Geometry.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

1	Domínio de X_1	17
2	Representação Geométrica de X_1	17
3	Representação Geométrica de X_1^{-1}	18
4	Parametrização da Esfera de Raio r	21
5	Parametrização do Toro	23
6	Parametrização do Plano	27
7	Plano	36
8	Cilindro Elíptico	38
9	Cilindro Circular	41
10	Cilindro Parabólico.....	42
11	Cilindro Hiperbólico de Duas Folhas	44
12	Cone Elíptico	47
13	Cone Circular.....	49
14	Elipsóide	50
15	Esfera	54
16	Hiperbolóide Elíptico de Uma Folha	55
17	Hiperbolóide Elíptico de Duas Folhas.....	58
18	Helicóide	62
19	Superfície de Enneper	64
20	Parabolóide Elíptico.....	71
21	Parabolóide Hiperbólico (Sela)	72
22	Sela de Macaco	74
23	Toro	78
24	Catenóide.....	79
25	Pseudo-esfera.....	80
26	Chapéu de Scherlock.....	82
27	Gráfico da Curvatura Gaussiana Nula	88
28	Gráfico da Curvatura Gaussiana da Esfera.....	89
29	Gráfico da Curvatura Gaussiana da Pseudo-esfera	89
30	Gráfico da Curvatura Gaussiana do Helicóide.....	90
31	Diretriz e Geratriz do Gráfico da Curvatura Gaussiana do Helicóide ...	91
32	Interseção do Gráfico da Curvatura Gaussiana do Helicóide com o Plano yz	91
33	Pontos de Mínimo no Gráfico da Curvatura Gaussiana do Helicóide...	93
34	Gráfico dos Pontos do Helicóide onde a Curvatura Gaussiana é Mínima	94
35	Gráfico da Curvatura Gaussiana do Catenóide	94

36	Diretriz e Geratriz do Gráfico da Curvatura Gaussiana do Catenóide..	95
37	Pontos de Mínimo no Gráfico da Curvatura Gaussiana do Catenóide .	97
38	Gráfico dos Pontos do Catenóide onde a Curvatura Gaussiana é Mínima.....	97
39	Gráfico da Curvatura Gaussiana do Toro.....	98
40	Diretriz e Geratriz do Gráfico da Curvatura Gaussiana do Toro	99
41	Interseção do Gráfico da Curvatura Gaussiana do Toro com o Plano yz	99
42	Pontos do Gráfico da Curvatura Gaussiana do Toro onde K é Nula ...	100
43	Gráfico dos Pontos do Toro onde a Curvatura Gaussiana é Nula	100
44	Pontos do Gráfico da Curvatura Gaussiana do Toro onde K é Negativa	101
45	Gráfico dos Pontos do Toro onde a Curvatura Gaussiana é Negativa .	101
46	Pontos do Gráfico da Curvatura Gaussiana do Toro onde K é Positiva	102
47	Gráfico dos Pontos do Toro onde a Curvatura Gaussiana é Positiva ...	102
48	Pontos de Máximo no Gráfico da Curvatura Gaussiana do Toro.....	104
49	Gráfico dos Pontos do Toro onde a Curvatura Gaussiana é Máxima...	105
50	Pontos de Mínimo no Gráfico da Curvatura Gaussiana do Toro.....	106
51	Gráfico dos Pontos do Toro onde a Curvatura Gaussiana é Mínima....	106
52	Análise Gráfica da Curvatura Gaussiana do Toro	107
53	Gráfico da Curvatura Gaussiana do Chapéu de Scherlock	108
54	Gráfico da Curvatura Gaussiana do Chapéu de Scherlock	108
55	Interseção do Gráfico da Curvatura Gaussiana do Chapéu de Scher- lock com o Plano xz	109
56	Pontos do Gráfico da Curvatura Gaussiana do Chapéu de Scherlock onde K é Nula.....	109
57	Gráfico dos Pontos do Chapéu de Scherlock onde a Curvatura Gaus- siana é Nula	110
58	Pontos do Gráfico da Curvatura Gaussiana do Chapéu de Scherlock onde K é Negativa	111
59	Gráfico dos Pontos do Chapéu de Scherlock onde a Curvatura Gaus- siana é Negativa	111
60	Pontos do Gráfico da Curvatura Gaussiana do Chapéu de Scherlock onde K é Positiva.....	112
61	Gráfico dos Pontos do Chapéu de Scherlock onde a Curvatura Gaus- siana é Positiva	112
62	Gráfico dos Pontos Críticos de k	113
63	Pontos de Máximo no Gráfico da Curvatura Gaussiana do Chapéu de Scherlock.....	114
64	Gráfico dos Pontos do Chapéu de Scherlock onde a Curvatura Gaus- siana é Máxima.....	114

65	Pontos de Mínimo no Gráfico da Curvatura Gaussiana do Chapéu de Scherlock	115
66	Gráfico dos Pontos do Chapéu de Scherlock onde a Curvatura Gaussiana é Mínima.....	115
67	Análise Gráfica da Curvatura Gaussiana do Chapéu de Scherlock.....	116
68	Gráfico da Curvatura Gaussiana da Superfície de Enneper	117
69	Ponto de Mínimo no Gráfico da Curvatura Gaussiana da Superfície de Enneper.....	119
70	Gráfico do Ponto da Superfície de Enneper onde a Curvatura Gaussiana é Mínima	120
71	Gráfico da Curvatura Gaussiana do Parabolóide Elíptico	120
72	Ponto de Máximo no Gráfico da Curvatura Gaussiana do Parabolóide Elíptico	123
73	Gráfico do Ponto do Parabolóide Elíptico onde a Curvatura Gaussiana é Máxima	124
74	Gráfico da Curvatura Gaussiana do Parabolóide Hiperbólico	125
75	Ponto de Mínimo no Gráfico da Curvatura Gaussiana do Parabolóide Hiperbólico	127
76	Gráfico do Ponto do Parabolóide Hiperbólico onde a Curvatura Gaussiana é Mínima.....	128
77	Gráfico da Curvatura Gaussiana do Elipsóide	129
78	Pontos de Máximo no Gráfico da Curvatura Gaussiana do Elipsóide ..	133
79	Gráfico dos Pontos do Elipsóide onde a Curvatura Gaussiana é Máxima	134
80	Pontos de Mínimo no Gráfico da Curvatura Gaussiana do Elipsóide...	134
81	Gráfico dos Pontos do Elipsóide onde a Curvatura Gaussiana é Mínima	135
82	Gráfico da Curvatura Gaussiana do Hiperbolóide Elíptico de Uma Folha	136
83	Pontos de Mínimo no Gráfico da Curvatura Gaussiana do Hiperbolóide Elíptico de Uma Folha	140
84	Gráfico dos Pontos do Hiperbolóide Elíptico de Uma Folha onde a Curvatura Gaussiana é Mínima.....	140
85	Gráfico da Curvatura Gaussiana do Hiperbolóide Elíptico de Duas Folhas.....	141
86	Pontos de Máximo no Gráfico da Curvatura Gaussiana do Hiperbolóide Elíptico de Duas Folhas.....	145
87	Gráfico dos Pontos do Hiperbolóide Elíptico de Duas Folhas onde a Curvatura Gaussiana é Máxima	145
88	Gráfico da Curvatura Gaussiana da Sela de Macaco	146
89	Ponto do Gráfico da Curvatura Gaussiana da Sela de Macaco onde K é Nula	147

90	Gráfico do Ponto da Sala de Macaco onde a Curvatura Gaussiana é Nula.....	147
91	Gráfico da Função $f(A)$	150
92	Pontos de Mínimo no Gráfico da Curvatura Gaussiana da Sela de Macaco	151
93	Gráfico dos Pontos da Sela de Macaco onde a Curvatura Gaussiana é Mínima	151
94	Resumo: Curvatura Gaussiana do Helicóide.....	153
95	Resumo: Curvatura Gaussiana do Catenóide	153
96	Resumo: Curvatura Gaussiana do Toro.....	154
97	Resumo: Curvatura Gaussiana do Chapéu de Scherlock	155
98	Resumo: Curvatura Gaussiana da Superfície de Enneper.....	155
99	Resumo: Curvatura Gaussiana do Parabolóide Elíptico	156
100	Resumo: Curvatura Gaussiana do Parabolóide Hiperbólico	157
101	Resumo: Curvatura Gaussiana do Elipsóide.....	157
102	Resumo: Curvatura Gaussiana do Hiperbolóide Elíptico de Uma Folha	158
103	Resumo: Curvatura Gaussiana do Hiperbolóide Elíptico de Duas Folhas	159
104	Resumo: Curvatura Gaussiana da Sela de Macaco	159

LISTA DE TABELAS

1	Curvaturas Gaussianas	86
2	Análise de K : Plano, Cilindros e Cones	152
3	Análise de K : Esfera	152
4	Análise de K : Pseudo-esfera.....	152
5	Análise de K : Helicóide	152
6	Análise de K : Catenóide	153
7	Análise de K : Toro	154
8	Análise de K : Chapéu de Scherlock.....	154
9	Análise de K : Superfície de Enneper.....	155
10	Análise de K : Parabolóide Elíptico	156
11	Análise de K : Parabolóide Hiperbólico.....	156
12	Análise de K : Elipsóide	157
13	Análise de K : Hiperbolóide Elíptico de Uma Folha	158
14	Análise de K : Hiperbolóide Elíptico de Duas Folhas.....	158
15	Análise de K : Sela de Macaco	159

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	13
1 A CURVATURA GAUSSIANA EM COORDENADAS LOCAIS	15
1.1 SUPERFÍCIES REGULARES	15
1.2 MUDANÇA DE PARÂMETRO	23
1.3 PLANO TANGENTE.....	24
1.4 PRIMEIRA FORMA FUNDAMENTAL	25
1.5 APLICAÇÃO NORMAL DE GAUSS	28
1.6 SEGUNDA FORMA FUNDAMENTAL.....	30
1.7 CURVATURA GAUSSIANA.....	32
2 SUPERFÍCIES REGULARES CLÁSSICAS: CURVATURA GAUSSIANA	36
2.1 PLANO.....	36
2.2 CILINDRO ELÍPTICO.....	38
2.3 CILINDRO CIRCULAR.....	40
2.4 CILINDRO PARABÓLICO	41
2.5 CILINDRO HIPERBÓLICO DE DUAS FOLHAS.....	44
2.6 CONE ELÍPTICO.....	46
2.7 CONE CIRCULAR.....	49
2.8 ELIPSÓIDE.....	50
2.9 ESFERA.....	53
2.10 HIPERBOLÓIDE ELÍPTICO DE UMA FOLHA	54
2.11 HIPERBOLÓIDE ELÍPTICO DE DUAS FOLHAS	58
2.12 HELICÓIDE	61
2.13 SUPERFÍCIE DE ENNEPER	64
2.14 SUPERFÍCIE DE MONGE.....	68
2.15 PARABOLÓIDE ELÍPTICO	71
2.16 PARABOLÓIDE HIPERBÓLICO (SELA).....	72
2.17 SELA DE MACACO	73
2.18 SUPERFÍCIE DE REVOLUÇÃO	74
2.19 TORO	77
2.20 CATENÓIDE	79
2.21 PSEUDO-ESFERA	80
2.22 CHAPÉU DE SCHERLOCK.....	82
2.23 TABELA DAS SUPERFÍCIES REGULARES CLÁSSICAS E SUAS CURVATURAS GAUSSIANAS.....	86
3 SUPERFÍCIES REGULARES CLÁSSICAS: ESTUDO DA CURVA- TURA GAUSSIANA	88

3.1	SUPERFÍCIES REGULARES CLÁSSICAS COM CURVATURA GAUSSIANA NULA	88
3.2	SUPERFÍCIES REGULARES CLÁSSICAS COM CURVATURA GAUSSIANA CONSTANTE NÃO NULA	89
3.2.1	Esfera	89
3.2.2	Pseudo-esfera	89
3.3	SUPERFÍCIES REGULARES CLÁSSICAS COM CURVATURA GAUSSIANA VARIÁVEL.....	90
3.3.1	Helicóide	90
3.3.2	Catenóide	94
3.3.3	Toro	98
3.3.4	Chapéu de Scherlock	107
3.3.5	Superfície de Enneper	116
3.3.6	Parabolóide Elíptico	120
3.3.7	Parabolóide Hiperbólico	124
3.3.8	Elipsóide	128
3.3.9	Hiperbolóide Elíptico de Uma Folha	135
3.3.10	Hiperbolóide Elíptico de Duas Folhas	140
3.3.11	Sela de Macaco	146
3.4	TABELAS COM RESUMOS DAS ANÁLISES DAS CURVATURAS GAUSSIANAS DAS SUPERFÍCIES REGULARES CLÁSSICAS	152
	CONCLUSÃO	160
	REFERÊNCIAS	161
	 ANEXOS	 162
	ANEXO A – MÁXIMOS E MÍNIMOS DE FUNÇÕES DE UMA E DUAS VARIÁVEIS	163
A.1	MÁXIMOS E MÍNIMOS DE FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL.....	163
A.2	MÁXIMOS E MÍNIMOS DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS	164

INTRODUÇÃO

Assim como a taxa de variação da reta tangente a uma curva regular C nos leva a uma entidade geométrica importante, a saber, a curvatura de C , podemos também estender essa ideia para superfícies regulares, isto é, medir quão rapidamente uma superfície S se afasta do plano tangente $T_p S$, em uma vizinhança de $p \in S$. Este conceito geométrico denominamos curvatura Gaussiana que, como sugere o nome, foi fundamentado pelo matemático e astrônomo alemão Carl Friedrich Gauss (1777–1855) em sua obra *Disquisitiones Generales Circa Superfícies Curvas*, que foi completada em 1827 e publicada em 1828 (GORODSKI, 2008).

O *Teorema Egregium de Gauss* (1.7.1) diz que a curvatura Gaussiana de uma superfície regular é um conceito intrínseco, ou seja, não depende do espaço ambiente na qual a superfície se encontra. Ainda assim, a curvatura Gaussiana é um conceito local, isto é, o seu valor, em geral, varia em cada ponto de uma superfície.

Neste trabalho calculamos a curvatura Gaussiana dos pontos de algumas superfícies regulares clássicas, isto é, encontramos uma expressão geral para a curvatura Gaussiana destas superfícies. Em posse destas expressões fizemos então uma investigação mais detalhada a respeito do comportamento da curvatura Gaussiana destas superfícies, mais precisamente, investigamos se existem pontos onde a curvatura Gaussiana é máxima ou mínima, pontos onde ela é positiva ou negativa e pontos onde ela é nula. Estas análises foram feitas algebricamente utilizando as ferramentas do cálculo e graficamente através do software GeoGebra.

No Capítulo 1, apresentamos algumas definições e resultados importantes para o desenvolvimento do trabalho baseados em Carmo (2012), Tenenblat (2008), O'Neill (2006) e Gray, Abbena e Salamon (2017). Os principais objetivos deste capítulo são: exibir uma definição para superfície regular, exibir expressões em um sistema de coordenadas locais para encontrar os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental, mostrar as definições da aplicação normal de Gauss e da curvatura Gaussiana e por fim apresentar uma expressão em um sistema de coordenadas locais para determinar a curvatura Gaussiana. Para mais detalhes e aprofundamento a respeito dos conceitos abordados neste capítulo, recomendamos a leitura de Carmo (2012), Tenenblat (2008), O'Neill (2006) e Gray, Abbena e Salamon (2017).

No Capítulo 2, por meio da expressão da curvatura Gaussiana apresentada no Capítulo 1, calculamos a expressão geral da curvatura Gaussiana de algumas superfícies regulares. Nele reunimos num só lugar os cálculos da curvatura Gaussiana das superfícies regulares mais frequentes na literatura. Aqui apresentamos um método sistemático para esse cálculo e detalhamos cada parte desse processo. Todas as

superfícies exibidas neste capítulo são reconhecidamente superfícies regulares, por conta disso e por não ser o propósito deste trabalho demonstrar este fato, assumimos a regularidade de todas essas superfícies e as chamamos de superfícies regulares clássicas.

Por fim, no Capítulo 3, através das expressões encontradas no Capítulo 2, fizemos um estudo do comportamento da curvatura Gaussiana dessas superfícies clássicas. Mais precisamente, investigamos os pontos onde a curvatura Gaussiana é máxima ou mínima, os pontos onde ela é positiva ou negativa e os pontos onde ela é nula. Estas investigações sobre o comportamento da curvatura Gaussiana foram feitas algebricamente utilizando-se as ferramentas do cálculo, que podem ser vistas em Guidorizzi (2001a) e Guidorizzi (2001b), e graficamente através do software GeoGebra. Espera-se que este trabalho contribua para realçar ainda mais a beleza deste conceito denominado curvatura Gaussiana.

1 A CURVATURA GAUSSIANA EM COORDENADAS LOCAIS

Neste capítulo, baseado em Carmo (2012), Tenenblat (2008), O'Neill (2006) e Gray, Abbena e Salamon (2017), iremos apresentar algumas definições e resultados importantes para o desenvolvimento do trabalho. Em geral, serão introduzidos os conceitos de superfície regular, primeira forma fundamental, aplicação normal de Gauss, segunda forma fundamental e a curvatura Gaussiana, sendo que o propósito final será apresentar a expressão em um sistema de coordenadas locais para a curvatura Gaussiana. Para mais detalhes e aprofundamento a respeito destes conceitos, recomendo a leitura de Carmo (2012), Tenenblat (2008), O'Neill (2006) e Gray, Abbena e Salamon (2017).

1.1 SUPERFÍCIES REGULARES

Segundo Carmo (2012), uma superfície regular em \mathbb{R}^3 é, sem grande rigor, uma figura bi-dimensional que não apresente pontas, arestas ou auto-interseções, em outros termos, podemos dizer que ela é suave. A seguir apresentamos uma definição rigorosa para superfície regular.

Definição 1.1.1 (Superfície Regular). *Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular se, para cada $p \in S$, existe uma vizinhança V de p em \mathbb{R}^3 e uma aplicação $X : U \rightarrow V \cap S$ de um aberto U de \mathbb{R}^2 sobre $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ tal que*

1. *X é diferenciável. Isto significa que se escrevemos*

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in U,$$

as funções $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens em U .

2. *X é um homeomorfismo. Como X é contínua pela condição 1, isto significa que X tem inversa $X^{-1} : V \cap S \rightarrow U$ que é contínua.*

3. *(condição de regularidade) Para todo $q \in U$, a diferencial $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva.*

Observação 1.1.1. *Sobre a Definição 1.1.1:*

- (a) *A aplicação X é chamada uma parametrização ou um sistema de coordenadas locais em uma vizinhança de p .*
- (b) *A vizinhança $V \cap S$ de p em S é chamada vizinhança coordenada.*

- (c) O item 1 é natural para que possamos utilizar as ferramentas do cálculo diferencial sobre S .
- (d) A injetividade no item 3 tem como objetivo excluir a possibilidade de auto-interseções em superfícies regulares.
- (e) O item 3 garante a existência de um plano tangente em todos os pontos de S . Segundo Tenenblat (2008) existem algumas formas equivalentes de expressar a condição do item 3. Sejam $\{e_1, e_2\}$ a base canônica de \mathbb{R}^2 e $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ a base canônica de \mathbb{R}^3 . Assim, para cada $q = (u_0, v_0) \in U$ a matriz da aplicação linear dX_q nas bases canônicas é a matriz jacobiana

$$dX_q = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix},$$

pois

$$dX_q(e_1) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right),$$

$$dX_q(e_2) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \right).$$

Daí, denotando esses dois vetores, respectivamente, por $X_u(u_0, v_0)$ e $X_v(u_0, v_0)$, então o item 3 é equivalente às seguintes afirmações:

- (i) os vetores $X_u(u_0, v_0)$ e $X_v(u_0, v_0)$ são linearmente independentes;
- (ii) o produto vetorial $X_u(u_0, v_0) \wedge X_v(u_0, v_0) \neq 0$;
- (iii) um dos determinantes Jacobianos

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)},$$

é diferente de zero.

Sejam $X : U \rightarrow V \cap S$ e $q = (u_0, v_0) \in U$, então as curvas

$$u \mapsto X(u, v_0),$$

$$v \mapsto X(u_0, v),$$

são chamadas *curvas coordenadas*, de X em $q = (u_0, v_0)$, e estão em S . Os vetores $X_u(u_0, v_0)$ e $X_v(u_0, v_0)$ são os vetores tangentes às curvas coordenadas.

Exemplo 1.1.1. Vamos mostrar que a esfera unitária $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ é uma superfície regular.

Primeiro devemos encontrar uma parametrização para a esfera S^2 . Temos que a equação da esfera de raio unitário é dada por

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Isolando z obtemos

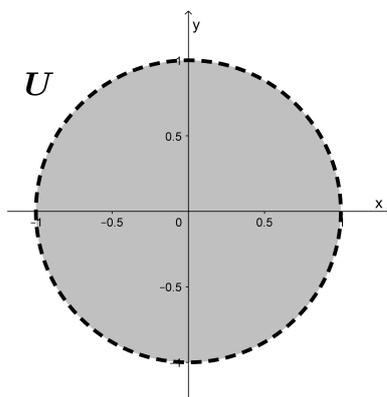
$$z = \pm\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}, \quad x^2 + y^2 < 1.$$

Logo, a aplicação $X_1 : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$X_1(x, y) = \left(x, y, +\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}\right), \quad (x, y) \in U,$$

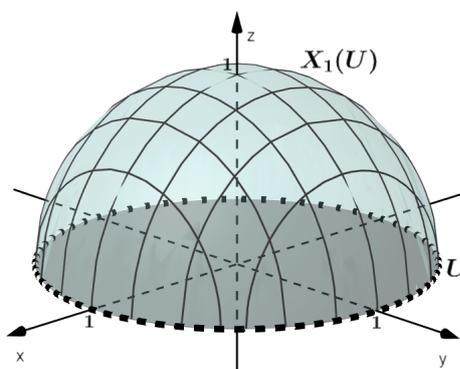
onde $\mathbb{R}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0\}$ e $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$ (Figura 1), é uma parametrização de S^2 . Observe que $X_1(U)$ é a parte (aberta) de S^2 acima do plano xy (Figura 2).

Figura 1 – Domínio de X_1 .



Fonte: Autor.

Figura 2 – Representação Geométrica de X_1 .



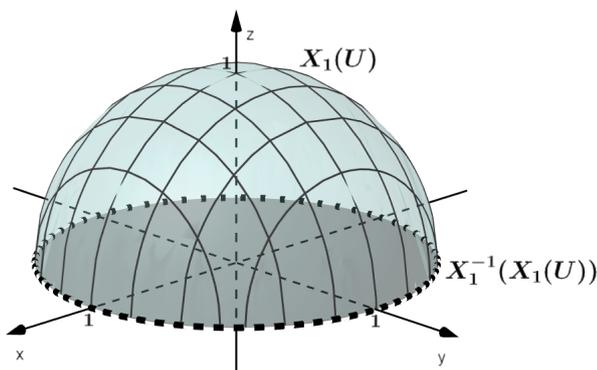
Fonte: Autor.

Agora devemos verificar os 3 itens da Definição 1.1.1.

Item 1. Como $x^2 + y^2 < 1$, a função $z = f(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$ tem derivadas parciais contínuas de todas as ordens, isto é, é de classe C^∞ . Portanto, X_1 é diferenciável.

Item 2. Note que X_1 é bijetiva e que X_1^{-1} é a restrição da projeção (contínua) $\pi(x, y, z) = (x, y)$ ao conjunto $X_1(U)$. Assim, X_1^{-1} é contínua em $X_1(U)$ (Figura 3).

Figura 3 – Representação Geométrica de X_1^{-1} .



Fonte: Autor.

Item 3. Para verificar a condição 3, basta mostrar que $\frac{\partial x}{\partial u} \wedge \frac{\partial x}{\partial v} \neq 0$ ou, que um dos determinantes Jacobianos

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}$$

é diferente de zero.

Temos que

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$$

Portanto

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(x, y)} \neq 0.$$

Agora, cobriremos a esfera inteira utilizando parametrizações similares. Procedemos da seguinte maneira. Definimos $X_2 : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ por

$$X_2(x, y) = \left(x, y, -\sqrt{1 - (x^2 + y^2)} \right), \quad (x, y) \in U,$$

verificamos que X_2 é uma parametrização, e observamos que $X_1(U) \cup X_2(U)$ cobre a esfera menos o equador

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1, z = 0\}.$$

Utilizando então os plano xz e zy , definimos as seguintes parametrizações

$$\begin{aligned} X_3(x, y) &= \left(x, +\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}, z \right), \\ X_4(x, y) &= \left(x, -\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}, z \right), \\ X_5(x, y) &= \left(+\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}, y, z \right), \\ X_6(x, y) &= \left(-\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}, y, z \right), \end{aligned}$$

que, juntamente com X_1 e X_2 , cobrem inteiramente S^2 . Mostramos assim que S^2 é uma superfície regular.

O Exemplo 1.1.1 mostra que, verificar se um dado subconjunto de \mathbb{R}^3 é uma superfície regular, a partir da Definição 1.1.1, pode ser muito trabalhoso. A seguir serão apresentadas duas proposições que simplificam essa tarefa para algumas superfícies.

Proposição 1.1.1. *Se $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável em um conjunto aberto U de \mathbb{R}^2 , então o gráfico de f , isto é, o subconjunto de \mathbb{R}^3 dado por $(x, y, f(x, y))$ para $(x, y) \in U$, é uma superfície regular.*

Demonstração. Basta mostrar que a aplicação $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$X(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

é uma parametrização do gráfico, cuja vizinhança coordenada cobre todos os pontos do gráfico. O item 1 da Definição 1.1.1 é verificada sem problemas e o item 3 também não oferece dificuldade, uma vez que $\partial(x, z)/\partial(u, v) \equiv 1$. Finalmente, cada ponto (x, y, z) do gráfico é a imagem por X de um único ponto $(u, v) = (x, y) \in U$. Consequentemente, X é bijetiva, e como X^{-1} é a restrição ao gráfico de f da projeção (contínua) de \mathbb{R}^3 sobre o plano xy , X^{-1} é contínua. \square

Definição 1.1.2 (Superfície de Monge). *A superfície obtida pelo gráfico de f da Proposição 1.1.1 é chamada superfície de Monge.*

Definição 1.1.3. *Dada uma aplicação diferenciável $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida em um conjunto aberto U de \mathbb{R}^n , dizemos que $p \in U$ é um ponto crítico de F se a diferencial $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ não é uma aplicação sobrejetiva. A imagem $F(p) \in \mathbb{R}^m$ de um ponto crítico é chamado de um valor crítico de F . Um ponto de \mathbb{R}^m que não é um valor crítico é chamado um valor regular de F .*

Proposição 1.1.2. *Se $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e $a \in f(U)$ é um valor regular de f , então $f^{-1}(a)$ é uma superfície regular em \mathbb{R}^3 .*

Demonstração. A demonstração desta proposição pode ser vista em Carmo (2012, p. 69-70).

A proposição seguinte, segundo Carmo (2012), garante que se já sabemos que uma superfície S é regular e temos X um candidato a ser uma parametrização de S , então não é preciso verificar que X^{-1} é contínua, desde que as outras condições da Definição 1.1.1 sejam satisfeitas.

Proposição 1.1.3. *Seja $p \in S$ um ponto de uma superfície regular S e seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação com $p \in X(U)$ tal que as condições 1 e 3 da Definição 1.1.1 sejam satisfeitas. Suponha que X seja bijetiva. Então X^{-1} é contínua.*

Demonstração. A demonstração desta proposição pode ser vista em Carmo (2012, p. 74).

Para finalizar a seção de superfícies regulares apresentaremos a seguir uma definição para superfície parametrizada e uma proposição que garante que podemos estender os conceitos e propriedades locais da geometria diferencial a superfícies regulares parametrizadas, ou seja, segundo (CARMO, 2012), nas superfícies parametrizadas regulares só é possível tratar de questões locais.

Definição 1.1.4 (Superfície Regular Parametrizada). *Uma superfície parametrizada $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma aplicação diferenciável X de um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ em \mathbb{R}^3 . O conjunto $X(U) \subset \mathbb{R}^3$ é chamado o traço de X . X é regular se a diferencial $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva para todo $q \in U$ (i.e. o item 3) da Definição 1.1.1). Um ponto $p \in U$ onde dX_p não é injetiva é chamado um ponto singular de X .*

Veja que uma superfície parametrizada, mesmo quando ela é regular, pode ter auto-interseções no seu traço.

Proposição 1.1.4. *Seja $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície regular parametrizada e seja $q \in U$. Então existe uma vizinhança V de q em \mathbb{R}^3 tal que $X(V) \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular.*

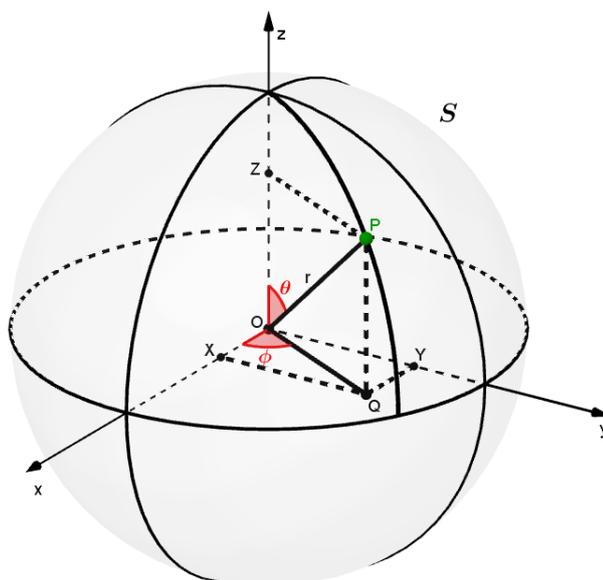
Demonstração. A demonstração desta proposição pode ser vista em Carmo (2012, p. 93-94).

Por fim, como mencionaremos na Seção 1.2, uma superfície regular admite várias parametrizações e sabendo disso, escolher uma parametrização adequada é essencial para o desenvolvimento dos cálculos. Nos exemplos a seguir mostramos as parametrizações de algumas delas e de antemão já mencionamos que todas as superfícies tratadas neste trabalho são superfícies regulares.

Exemplo 1.1.2. *Dado o sistema de coordenadas cartesiano, sejam P um ponto do espaço \mathbb{R}^3 e Q a projeção de P no plano xy . O sistema de coordenadas esféricas*

associa P a três números reais (r, ϕ, θ) correspondendo respectivamente ao tamanho do segmento OP , ao ângulo que o segmento OQ faz com a semi-reta positiva de Ox e ao ângulo que o segmento OP faz com a semi-reta positiva de Oz (Figura 4).

Figura 4 – Parametrização da Esfera de Raio r



Fonte: Autor.

Isto é, temos que

$P = (x, y, z)$ um ponto genérico da superfície esférica S ;

$Q = (x, y, 0)$ a projeção de P no plano xy ;

$\phi =$ ângulo que OQ faz com o sentido positivo do eixo x ;

$\theta =$ ângulo que OP faz com o sentido positivo do eixo z .

Note que

$$PQ = z$$

e

$$\cos \theta = \frac{z}{r} \Rightarrow z = r \cos \theta.$$

Além disso, temos

$$\cos \phi = \frac{x}{OQ} \Rightarrow x = OQ \cos \phi.$$

Como

$$\sin \theta = \frac{OQ}{r} \Rightarrow OQ = r \sin \theta.$$

Logo,

$$x = r \sin \theta \cos \phi.$$

De forma análoga podemos concluir que

$$y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi,$$

com

$$0 < \theta < \pi, \quad 0 < \phi < 2\pi.$$

Portanto, uma parametrização para a esfera S (Figura 4) é dada por

$$X(\theta, \phi) = (r \operatorname{sen} \theta \cos \phi, r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, r \cos \theta), \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \phi < 2\pi.$$

Exemplo 1.1.3. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ o conjunto obtido ao girarmos uma curva regular plana e conexa C em torno de um eixo no plano que não encontra a curva; vamos considerar o plano xz como o plano da curva e o eixo Oz como o eixo de rotação. Seja

$$x = f(v), \quad z = g(v), \quad a < v < b, \quad f(v) > 0,$$

uma parametrização para C e denote por u o ângulo de rotação em torno do eixo Oz . Assim, obtemos a aplicação

$$X(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \operatorname{sen} u, g(v))$$

do conjunto aberto $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < 2\pi, a < v < b\}$ em S .

Como S pode ser inteiramente coberta por parametrizações similares, segue-se que S é uma superfície regular, chamada de superfície de revolução. A curva C é chamada curva geratriz de S , e o eixo Oz é o eixo de rotação de S . Os círculos descritos pelos pontos de C são chamados de paralelos de S , e as várias posições de C sobre S são chamados de meridianos de S . A prova de que uma superfície de revolução é uma superfície regular pode ser vista em Carmo (2012, p. 90-91).

Exemplo 1.1.4. O toro T é a superfície gerada pela rotação de um círculo S^1 de raio r em torno de uma reta pertencente ao plano do círculo e a uma distância $a > r$ do centro do círculo (Figura 5).

Uma parametrização para o toro T pode ser feita da seguinte forma como ilustra a Figura 5.

Note que

$$PQ = z$$

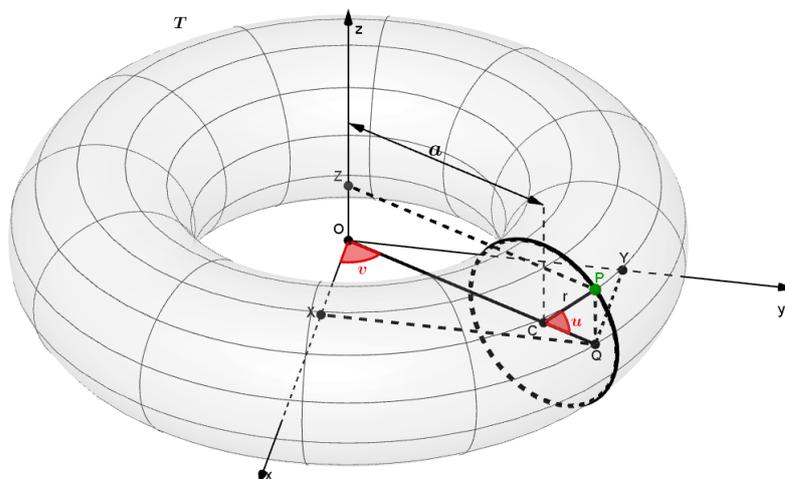
e

$$\operatorname{sen} u = \frac{z}{r} \Rightarrow z = r \operatorname{sen} u.$$

Além disso, temos que

$$\cos v = \frac{x}{a + CQ} \Rightarrow x = (a + CQ) \cos v.$$

Figura 5 – Parametrização do Toro



Fonte: Elaborada pelo autor.

Como

$$\cos u = \frac{CQ}{r} \Rightarrow CQ = r \cos u.$$

Logo,

$$x = (a + r \cos u) \cos v.$$

De forma análoga podemos concluir que

$$y = (a + r \cos u) \sin v.$$

Portanto, uma parametrização para o toro T é dada por

$$X(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \sin v, r \sin u),$$

$$0 < u < 2\pi, \quad 0 < v < 2\pi.$$

1.2 MUDANÇA DE PARÂMETRO

Segundo Carmo (2012) uma superfície regular pode admitir várias parametrizações e para que a Definição 1.1.1 faça sentido, é preciso que ela não dependa do sistema de coordenadas escolhido, ou seja, é preciso mostrar que quando um ponto de uma superfície regular pertence a duas vizinhanças coordenadas, com parâmetros (u_1, v_1) e (u_2, v_2) , é possível passar de um destes pares de coordenadas ao outro através de uma aplicação diferenciável.

Proposição 1.2.1 (Mudança de Parâmetros). *Seja p um ponto de uma superfície regular S , e sejam $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ e $Y : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ duas parametrizações de S , tais que $p \in X(U) \cap Y(V) = W$. Então a "mudança" de coordenadas $h = X^{-1} \circ Y : Y^{-1}(W) \rightarrow X^{-1}(W)$ é um difeomorfismo; isto é, h é diferenciável e tem uma inversa diferenciável h^{-1} .*

Demonstração. A demonstração desta proposição pode ser vista em Carmo (2012, p. 83).

1.3 PLANO TANGENTE

Nesta seção iremos mostrar que a condição 3 da Definição 1.1.1 garante que para cada ponto p de uma superfície regular S , o conjunto de vetores tangentes às curvas parametrizadas de S , passando por p , constituem um plano (CARMO, 2012).

Definição 1.3.1 (Vetor Tangente). *Seja p um ponto da superfície regular S , o vetor tangente $\alpha'(0)$ de uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$, com $\alpha(0) = p$, é chamado vetor tangente a S .*

Definição 1.3.2 (Plano Tangente). *O conjunto de todos os vetores tangentes às curvas parametrizadas de S , passando pelo ponto $p \in S$, é chamado o plano tangente de S no ponto p e denotado por $T_p S$.*

Proposição 1.3.1. *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização de uma superfície regular S e seja $q \in U$. O subespaço vetorial de dimensão 2,*

$$dX_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3,$$

coincide com o conjunto de todos os vetores tangentes (plano tangente) a S em $X(q)$.

Demonstração. A demonstração desta proposição pode ser vista em Carmo (2012, p. 98).

Em outras palavras, a Proposição 1.3.1 anterior, garante que o plano $dX_q(\mathbb{R}^2)$, que passa por $X(q) = p$, é o $T_p S$ (plano tangente a S no ponto p) e que ele não depende da parametrização X . A escolha de uma parametrização X determina uma base $\{X_u(q), X_v(q)\}$ de $T_p S$, chamada *base associada* a X .

Segundo Carmo (2012) podemos escrever um vetor $w \in T_p S$ na base associada a uma parametrização X da seguinte maneira

$$\begin{aligned} w &= \alpha'(0), \\ &= \frac{d}{dt} X(u(t), v(t))(0), \\ &= X_u(q)u'(0) + X_v(q)v'(0). \end{aligned}$$

Portanto, na base $\{X_u(q), X_v(q)\}$, w tem coordenadas $(u'(0), v'(0))$, onde $u(t), v(t)$ é a expressão, na parametrização X , de uma curva cujo vetor velocidade em $t = 0$ é w .

1.4 PRIMEIRA FORMA FUNDAMENTAL

A primeira forma fundamental é um conceito que está relacionado com questões métricas de uma superfície regular, como por exemplo, o comprimento de curvas em uma superfície regular, ângulo entre vetores tangentes de uma superfície regular e áreas de regiões da superfície regular (TENENBLAT, 2008).

Segundo Carmo (2012), o produto interno natural (produto escalar) do $\mathbb{R}^3 \supset S$, induz em cada plano tangente $T_p S$ de uma superfície regular S um produto interno, que indicaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ da seguinte forma: Se $w_1, w_2 \in T_p S \subset \mathbb{R}^3$ então $\langle w_1, w_2 \rangle_p$ é igual ao produto interno de w_1 e w_2 , como vetores em \mathbb{R}^3 , isto é, se $w_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $w_2 = (x_2, y_2, z_2)$ então

$$\langle w_1, w_2 \rangle_p = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Definição 1.4.1 (Primeira Forma Fundamental). *A forma quadrática I_p em $T_p S$ definida por*

$$\begin{aligned} I_p : T_p S &\rightarrow \mathbb{R} \\ w &\rightarrow I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = |w|_p^2 \geq 0, \end{aligned}$$

é chamada a primeira forma fundamental da superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ em $p \in S$.

Assim, de acordo com Carmo (2012), a primeira forma fundamental é meramente a expressão de como a superfície S herda o produto interno natural do \mathbb{R}^3 . Geometricamente, como já mencionado, a primeira forma fundamental nos possibilita fazer medidas sobre a superfície, sem fazer menção ao espaço ambiente \mathbb{R}^3 , onde está a superfície.

Vamos agora expressar a primeira forma fundamental na base $\{X_u, X_v\}$ associada a uma parametrização $X(u, v)$ em p . Como um vetor tangente $w \in T_p S$ é o vetor tangente a uma curva parametrizada $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, com $p = \alpha(0) = X(u_0, v_0)$. Por definição temos que $I_p(w) = \langle w, w \rangle_p$ e como por hipótese $\alpha'(0) = w$, temos que

$$\begin{aligned} I_p(\alpha'(0)) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p, \\ &= \langle X_u u' + X_v v', X_u u' + X_v v' \rangle_p, \\ &= \langle X_u u', X_u u' \rangle_p + \langle X_u u', X_v v' \rangle_p + \langle X_v v', X_u u' \rangle_p + \langle X_v v', X_v v' \rangle_p, \\ &= \langle X_u, X_u \rangle_p (u')^2 + 2 \langle X_u, X_v \rangle_p u' v' + \langle X_v, X_v \rangle_p (v')^2, \\ &= E(u')^2 + 2F u' v' + G(v')^2, \end{aligned}$$

onde os valores das funções envolvidas são calculados em $t = 0$, e

$$\begin{aligned} E(u_0, v_0) &= \langle X_u, X_u \rangle_p, \\ F(u_0, v_0) &= \langle X_u, X_v \rangle_p, \\ G(u_0, v_0) &= \langle X_v, X_v \rangle_p, \end{aligned}$$

são os coeficientes da primeira forma fundamental na base $\{X_u, X_v\}$ de T_pS . Fazendo p variar na vizinhança coordenada correspondente a $X(u, v)$, obtemos funções $E(u, v)$, $F(u, v)$, $G(u, v)$, que são diferenciáveis nessa vizinhança.

De agora em diante, iremos omitir o índice p na indicação do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ ou da forma quadrática I_p , quando for claro pelo contexto a que ponto nos referimos.

Segundo Tenenblat (2008), as funções E , F e G satisfazem as seguintes propriedades.

1. $E(u, v) > 0$ e $G(u, v) > 0$ para todo (u, v) . De fato, pois os vetores X_u e X_v são não-nulos. Em outros termos, temos pela definição que

$$E(u, v) = \langle X_u, X_u \rangle_p = |X_u|_p^2 > 0,$$

$$G(u, v) = \langle X_v, X_v \rangle_p = |X_v|_p^2 > 0.$$

2. $EG - F^2 > 0$. De fato, temos que

$$|X_u \wedge X_v| = |X_u||X_v| \sen \theta \quad (1.1)$$

e

$$\langle X_u, X_v \rangle = |X_u||X_v| \cos \theta \quad (1.2)$$

Elevando ao quadrado ambos os membros de (1.1) e (1.2) e em seguida somando membro a membro obtemos

$$|X_u \wedge X_v|^2 + \langle X_u, X_v \rangle^2 = |X_u|^2 |X_v|^2 \sen^2 \theta + |X_u|^2 |X_v|^2 \cos^2 \theta,$$

$$|X_u \wedge X_v|^2 + \langle X_u, X_v \rangle^2 = |X_u|^2 |X_v|^2 (\sen^2 \theta + \cos^2 \theta),$$

$$|X_u \wedge X_v|^2 + \langle X_u, X_v \rangle^2 = |X_u|^2 |X_v|^2,$$

$$|X_u \wedge X_v|^2 = |X_u|^2 |X_v|^2 - \langle X_u, X_v \rangle^2.$$

Mas como $E = |X_u|^2$, $G = |X_v|^2$ e $F = \langle X_u, X_v \rangle$, então podemos escrever a última igualdade acima como

$$|X_u \wedge X_v|^2 = EG - F^2,$$

$$EG - F^2 = |X_u \wedge X_v|^2 > 0.$$

3. $|X_u \wedge X_v| = \sqrt{EG - F^2}$. De fato, é imediato pelo item anterior onde $|X_u \wedge X_v|^2 = EG - F^2$ então

$$|X_u \wedge X_v| = \sqrt{EG - F^2}. \quad (1.3)$$

Usaremos este fato recorrentemente quando formos calcular a curvatura Gaussiana dos pontos de uma superfície regular.

Exemplo 1.4.1. Vamos calcular os coeficientes da primeira forma fundamental de um plano. Um sistema de coordenadas para um plano $P \subset \mathbb{R}^3$ passando por $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e contendo os vetores ortonormais $w_1 = (a_1, a_2, a_3), w_2 = (b_1, b_2, b_3)$ (Figura 6) é dado por

$$X(u, v) = p_0 + uw_1 + vw_2, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

ou

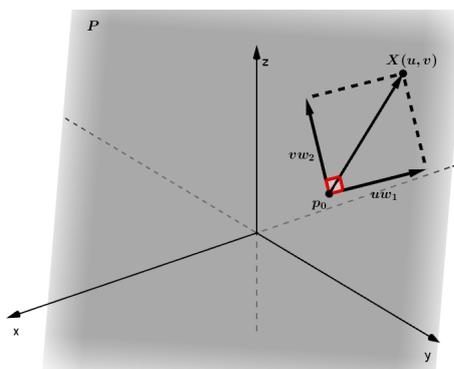
$$X(u, v) = (x_0 + ua_1 + vb_1, y_0 + ua_2 + vb_2, z_0 + ua_3 + vb_3), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

Daí, temos que as derivadas da aplicação X em relação a u e v são, respectivamente

$$X_u = (a_1, a_2, a_3) = w_1,$$

$$X_v = (b_1, b_2, b_3) = w_2.$$

Figura 6 – Parametrização do Plano



Fonte: Autor.

Como w_1 e w_2 são vetores unitários ortogonais, então

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = |X_u|^2 = |w_1|^2 = 1,$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = 0,$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = |X_v|^2 = |w_2|^2 = 1.$$

Neste caso trivial, a primeira forma fundamental é essencialmente o teorema de Pitágoras em P ; i.e., o quadrado do comprimento de um vetor w , com coordenadas a, b na base $\{X_u, X_v\}$, é igual a $a^2 + b^2$.

Exemplo 1.4.2. Vamos calcular os coeficientes da primeira forma fundamental da esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Do Exemplo 1.1.2, temos que uma parametrização para esta esfera é dada por

$$X(\theta, \phi) = (r \cos \theta \cos \phi, r \cos \theta \sin \phi, r \sin \theta), \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \phi < 2\pi.$$

Daí, temos que as derivadas da aplicação X em relação a θ e ϕ são, respectivamente

$$X_\theta = (r \cos \theta \cos \phi, r \cos \theta \sin \phi, -r \sin \theta),$$

$$X_\phi = (-r \sin \theta \sin \phi, r \sin \theta \cos \phi, 0).$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}
 E &= \langle X_\theta, X_\theta \rangle \\
 &= |X_\theta|^2 \\
 &= |(r \cos \theta \cos \phi, r \cos \theta \sin \phi, -r \sin \theta)|^2 \\
 &= (\sqrt{(r \cos \theta \cos \phi)^2 + (r \cos \theta \sin \phi)^2 + (-r \sin \theta)^2})^2 \\
 &= r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi + r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi + r^2 \sin^2 \theta \\
 &= r^2 \cos^2 \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + r^2 \sin^2 \theta \\
 &= r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta \\
 &= r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\
 &= r^2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F &= \langle X_\theta, X_\phi \rangle \\
 &= \langle (r \cos \theta \cos \phi, r \cos \theta \sin \phi, -r \sin \theta), (-r \sin \theta \sin \phi, r \sin \theta \cos \phi, 0) \rangle \\
 &= -r^2 \cos \theta \cos \phi \sin \theta \sin \phi + r^2 \cos \theta \cos \phi \sin \theta \sin \phi - r \sin \theta \cdot 0 \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G &= \langle X_\phi, X_\phi \rangle \\
 &= |X_\phi|^2 \\
 &= |(-r \sin \theta \sin \phi, r \sin \theta \cos \phi, 0)|^2 \\
 &= (\sqrt{(-r \sin \theta \sin \phi)^2 + (r \sin \theta \cos \phi)^2})^2 \\
 &= r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi \\
 &= r^2 \sin^2 \theta (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) \\
 &= r^2 \sin^2 \theta.
 \end{aligned}$$

1.5 APLICAÇÃO NORMAL DE GAUSS

De acordo com Carmo (2012), dado um ponto p em uma superfície regular S , existem dois vetores unitários em \mathbb{R}^3 que são normais ao plano tangente $T_p S$. Estes vetores são chamados de *vetores unitários* em p . Assim, fixando uma parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ em $p \in S$, podemos então definir a escolha de um vetor normal unitário em cada ponto $q \in X(U)$, pela aplicação diferenciável

$$N : X(U) \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

onde N é definida por

$$N(p) = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}(q).$$

Definição 1.5.1 (Orientação de Superfícies). *Uma superfície regular S é orientável se for possível cobri-la com uma família de vizinhanças coordenadas, de tal modo que se um ponto $p \in S$ pertence a duas vizinhanças dessa família, então a mudança de coordenadas tem Jacobiano positivo em p . A escolha de uma tal família é chamada uma orientação de S , e S , neste caso, diz-se orientada. Se uma tal escolha não é possível, a superfície é não-orientável. Se S é orientada, uma parametrização (local) X é compatível com a orientação de S se, juntando X à família de parametrizações dada pela orientação, obtém-se ainda uma (logo, a mesma) orientação de S .*

Em outras palavras, uma superfície regular S é dita orientável se ela admite um campo diferenciável de vetores normais unitários definido em toda a superfície. Assim, a escolha de um tal campo N é chamada uma orientação de S .

Definição 1.5.2 (Aplicação Normal de Gauss). *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície com uma orientação N . A aplicação $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ toma seus valores na esfera unitária*

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Aplicação $N : S \rightarrow S^2$, assim definida, é chamada a aplicação normal de Gauss de S .

Proposição 1.5.1. *A diferencial $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ da aplicação de Gauss é uma aplicação linear auto-adjunta.*

Demonstração. Como dN_p é linear, basta verificar que $\langle dN_p(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, dN_p(w_2) \rangle$ para uma base $\{w_1, w_2\}$ de $T_p S$. Seja $X(u, v)$ uma parametrização de S em p e $\{X_u, X_v\}$ a base associada de $T_p S$. Se $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ é uma curva parametrizada em S , com $\alpha(0) = p$, temos

$$\begin{aligned} dN_p(\alpha'(0)) &= dN_p(X_u u'(0) + X_v v'(0)) \\ &= \left. \frac{d}{dt} N(u(t), v(t)) \right|_{t=0} \\ &= N_u u'(0) + N_v v'(0); \end{aligned}$$

em particular, $dN_p(X_u) = N_u$ e $dN_p(X_v) = N_v$. Portanto, para provar que dN_p é auto-adjunta, é suficiente mostrar que

$$\langle N_u, X_v \rangle = \langle X_u, N_v \rangle.$$

Para ver isto, derivamos $\langle N, X_u \rangle = 0$ e $\langle N_v, X_v \rangle = 0$ (a igualdade vale, pois N é ortogonal à X_u e X_v), em relação a v e u , respectivamente, e obtemos

$$\begin{aligned} \langle N_v, X_u \rangle + \langle N, X_{uv} \rangle &= 0, \\ \langle N_u, X_v \rangle + \langle N, X_{vu} \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Assim,

$$\langle N_u, X_v \rangle = -\langle N, X_{vu} \rangle = \langle N_v, X_u \rangle.$$

□

1.6 SEGUNDA FORMA FUNDAMENTAL

O fato de $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ ser uma aplicação linear auto-adjunta, segundo Carmo (2012), nos permite associar a dN_p uma forma quadrática.

Definição 1.6.1 (Segunda Forma Fundamental). *A forma quadrática II_p em $T_p S$ definida por*

$$\begin{aligned} II_p : T_p S &\rightarrow \mathbb{R} \\ w &\rightarrow II_p(w) = -\langle dN_p(w), w \rangle_p, \end{aligned} \quad (1.4)$$

é chamada a segunda forma fundamental da superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ em $p \in S$.

Assim como fizemos com a primeira forma fundamental, iremos determinar uma expressão para a segunda forma fundamental em um sistema de coordenadas locais.

Seja $X(u, v)$ uma parametrização em um ponto $p \in S$ de uma superfície S , e seja $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ uma curva parametrizada em S , com $\alpha(0) = p$. A fim de simplificar a notação, convencionaremos que todas as funções que aparecem abaixo indicam seus valores no ponto p .

O vetor tangente a $\alpha(t)$ em p é $\alpha' = X_u u' + X_v v'$ e

$$dN(\alpha') = N'(u(t), v(t)) = N_u u' + N_v v'.$$

Além disso, temos que $\langle N, N \rangle = |N|^2 = 1$ e derivando em relação à u temos

$$\begin{aligned} \langle N_u, N \rangle + \langle N, N_u \rangle &= 0, \\ 2\langle N_u, N \rangle &= 0, \\ \langle N_u, N \rangle &= 0, \end{aligned}$$

logo, N_u e N são ortogonais, isto é, N_u é tangente à superfície, e, portanto, N_u pertence a $T_p S$. Analogamente concluímos que N_v pertence a $T_p S$. Assim, podemos escrever N_u e N_v na base $\{X_u, X_v\}$ de $T_p S$, isto é,

$$\begin{aligned} N_u &= a_{11}X_u + a_{21}X_v, \\ N_v &= a_{12}X_u + a_{22}X_v, \end{aligned} \quad (1.5)$$

e, portanto,

$$dN(\alpha') = N_u u' + N_v v'$$

$$\begin{aligned}
&= (a_{11}X_u + a_{21}X_v)u' + (a_{12}X_u + a_{22}X_v)v' \\
&= a_{11}X_uu' + a_{21}X_vu' + a_{12}X_uv' + a_{22}X_vv' \\
&= a_{11}X_uu' + a_{12}X_uv' + a_{21}X_vu' + a_{22}X_vv' \\
&= (a_{11}u' + a_{12}v')X_u + (a_{21}u' + a_{22}v')X_v,
\end{aligned}$$

isto é,

$$dN \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

Isto mostra que, na base $\{X_u, X_v\}$, dN é dada pela matriz $(a_{ij}), i, j = 1, 2$.

Por outro lado, a expressão da segunda forma fundamental na base $\{X_u, X_v\}$ é dada por

$$\begin{aligned}
II_p(\alpha') &= -\langle dN(\alpha'), \alpha' \rangle \\
&= -\langle N_uu' + N_vv', X_uu' + X_vv' \rangle \\
&= -\langle N_uu', X_uu' \rangle - \langle N_uu', X_vv' \rangle - \langle N_vv', X_uu' \rangle - \langle N_vv', X_vv' \rangle \\
&= -\langle N_u, X_u \rangle (u')^2 - \langle N_u, X_v \rangle (u'v') - \langle N_v, X_u \rangle (u'v') - \langle N_v, X_v \rangle (v')^2
\end{aligned}$$

e, como $\langle N, X_u \rangle = \langle N, X_v \rangle = 0$, então derivando $\langle N, X_u \rangle$ e $\langle N, X_v \rangle$ em relação a u , temos respectivamente

$$\begin{aligned}
\langle N_u, X_u \rangle + \langle N, X_{uu} \rangle &= 0 \\
-\langle N_u, X_u \rangle &= \langle N, X_{uu} \rangle,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle N_u, X_v \rangle + \langle N, X_{vu} \rangle &= 0 \\
-\langle N_u, X_v \rangle &= \langle N, X_{vu} \rangle.
\end{aligned}$$

Agora, derivando $\langle N, X_u \rangle$ e $\langle N, X_v \rangle$ em relação a v , temos respectivamente

$$\begin{aligned}
\langle N_v, X_u \rangle + \langle N, X_{uv} \rangle &= 0 \\
-\langle N_v, X_u \rangle &= \langle N, X_{uv} \rangle,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle N_v, X_v \rangle + \langle N, X_{vv} \rangle &= 0 \\
-\langle N_v, X_v \rangle &= \langle N, X_{vv} \rangle.
\end{aligned}$$

Daí, como $\langle N, X_{vu} \rangle = \langle N, X_{uv} \rangle$, então $\langle N_u, X_v \rangle = \langle N_v, X_u \rangle$. Logo, podemos reescrever a expressão da segunda forma fundamental na base $\{X_u, X_v\}$ como

$$II_p(\alpha') = -\langle N_u, X_u \rangle (u')^2 - 2\langle N_u, X_v \rangle (u'v') - \langle N_v, X_v \rangle (v')^2,$$

isto é,

$$II_p(\alpha') = e(u')^2 + 2f(u'v') + g(v')^2,$$

onde

$$\begin{aligned} e &= -\langle N_u, X_u \rangle = \langle N, X_{uu} \rangle, \\ f &= -\langle N_u, X_v \rangle = \langle N, X_{vu} \rangle = -\langle N_v, X_u \rangle = \langle N, X_{uv} \rangle, \\ g &= -\langle N_v, X_v \rangle = \langle N, X_{vv} \rangle. \end{aligned}$$

1.7 CURVATURA GAUSSIANA

Segundo Lima (2018), seja a aplicação linear $A : V \rightarrow V$ em um espaço vetorial de dimensão 2 e $\{v_1, v_2\}$ uma base de V , temos que

$$\text{determinante de } A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

onde (a_{ij}) é a matriz de A na base $\{v_1, v_2\}$. Além disso, o determinante não depende da base escolhida, é, portanto, associado à aplicação linear A .

Definição 1.7.1 (Curvatura Gaussiana). *Seja $p \in S$ e seja $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ a diferencial da aplicação de Gauss. O determinante de dN_p é chamado a curvatura Gaussiana K de S em p .*

Da Seção 1.6 anterior, temos que

$$dN \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

Vamos determinar uma expressão para a curvatura Gaussiana em um sistema de coordenadas locais. Para isto, primeiro obteremos os valores de a_{ij} em termos dos coeficientes e, f, g . Substituindo a Equação (1.5) nas expressões de e, f, g , temos

$$\begin{aligned} -e &= \langle N_u, X_u \rangle \\ &= \langle a_{11}X_u + a_{21}X_v, X_u \rangle \\ &= \langle a_{11}X_u, X_u \rangle + \langle a_{21}X_v, X_u \rangle \\ &= a_{11}\langle X_u, X_u \rangle + a_{21}\langle X_v, X_u \rangle \\ &= a_{11}E + a_{21}F, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -f &= \langle N_u, X_v \rangle \\ &= \langle a_{11}X_u + a_{21}X_v, X_v \rangle \\ &= \langle a_{11}X_u, X_v \rangle + \langle a_{21}X_v, X_v \rangle \\ &= a_{11}\langle X_u, X_v \rangle + a_{21}\langle X_v, X_v \rangle \\ &= a_{11}F + a_{21}G, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -f &= \langle N_v, X_u \rangle \\
 &= \langle a_{12}X_u + a_{22}X_v, X_u \rangle \\
 &= \langle a_{12}X_u, X_u \rangle + \langle a_{22}X_v, X_u \rangle \\
 &= a_{12}\langle X_u, X_u \rangle + a_{22}\langle X_v, X_u \rangle \\
 &= a_{12}E + a_{22}F,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -g &= \langle N_v, X_v \rangle \\
 &= \langle a_{12}X_u + a_{22}X_v, X_v \rangle \\
 &= \langle a_{12}X_u, X_v \rangle + \langle a_{22}X_v, X_v \rangle \\
 &= a_{12}\langle X_u, X_v \rangle + a_{22}\langle X_v, X_v \rangle \\
 &= a_{12}F + a_{22}G,
 \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
 -e &= a_{11}E + a_{21}F, \\
 -f &= a_{11}F + a_{21}G, \\
 -f &= a_{12}E + a_{22}F, \\
 -g &= a_{12}F + a_{22}G,
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

onde E, F e G são os coeficientes da primeira forma fundamental na base $\{X_u, X_v\}$ vistos na Seção 1.4. As relações da Equação (1.6) podem ser expressas em forma matricial por

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

Daí, multiplicando à direita em ambos os membros pela inversa de $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$, obtemos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}. \tag{1.7}$$

Agora, lembremos que a inversa de uma matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ é dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

então

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix},$$

e, portanto, a Equação (1.7) pode ser reescrita como

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = -\frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}; \tag{1.8}$$

donde

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} &= -\frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} eG - fF & -eF + fE \\ fG - gF & -fF + gE \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} fF - eG & eF - fE \\ gF - fG & fF - gE \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{fF - eG}{EG - F^2} & \frac{eF - fE}{EG - F^2} \\ \frac{gF - fG}{EG - F^2} & \frac{fF - gE}{EG - F^2} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2}, \\ a_{12} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2}, \\ a_{21} &= \frac{eF - fE}{EG - F^2}, \\ a_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2}. \end{aligned}$$

Pela Definição 1.7.1 temos que

$$K = \det(dN) = \det(a_{ij}),$$

isto é,

$$\begin{aligned} K &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ &= \left(\frac{fF - eG}{EG - F^2} \right) \left(\frac{fF - gE}{EG - F^2} \right) - \left(\frac{gF - fG}{EG - F^2} \right) \left(\frac{eF - fE}{EG - F^2} \right) \\ &= \frac{(fF - eG)(fF - gE)}{(EG - F^2)^2} - \frac{(gF - fG)(eF - fE)}{(EG - F^2)^2} \\ &= \frac{(fFfF - fFgE - eGfF + eGgE)}{(EG - F^2)^2} - \frac{(gFeF - gFfE - fGeF + fGfE)}{(EG - F^2)^2} \\ &= \frac{f^2F^2 - fFgE - eGfF + eGgE - gFeF + gFfE + fGeF - fGfE}{(EG - F^2)^2} \\ &= \frac{egEG - egF^2 - f^2EG + f^2F^2}{(EG - F^2)^2} \\ &= \frac{eg(EG - F^2) - f^2(EG - F^2)}{(EG - F^2)^2} \\ &= \frac{(EG - F^2)(eg - f^2)}{(EG - F^2)^2}, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}. \quad (1.9)$$

A Equação 1.9 mostra que a curvatura Gaussiana pode ser expressa em função dos coeficientes da primeira e segunda forma fundamental.

Não obstante, existe um resultado impressionante do estudo da geometria intrínseca das superfícies que é chamado *Teorema Egregium de Gauss*. Embora este estudo não faça parte do escopo deste trabalho é importante citar este teorema pois ele trata da curvatura Gaussiana.

Teorema 1.7.1 (Teorema Egregium de Gauss). *A curvatura Gaussiana só depende da primeira forma fundamental.*

Em outras palavras, a curvatura Gaussiana é uma propriedade intrínseca, isto é, não depende do espaço ambiente na qual a superfície se encontra. Este fato é realmente incrível, pois no próximo capítulo calcularemos a curvatura Gaussiana nos pontos de uma superfície regular usando a Equação 1.9 que está em função dos coeficientes da primeira e segunda forma fundamental.

2 SUPERFÍCIES REGULARES CLÁSSICAS: CURVATURA GAUSSIANA

No Capítulo 1 obteve-se a expressão 1.9 que indica que a curvatura Gaussiana pode ser escrita em função dos coeficientes da primeira e segunda forma fundamental. No presente capítulo calcularemos a curvatura Gaussiana de algumas superfícies regulares clássicas através dessa expressão. Para fazer estes cálculos usaremos um método sistemático que consiste em cinco passos. Considerando $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização de uma superfície regular S , determinaremos:

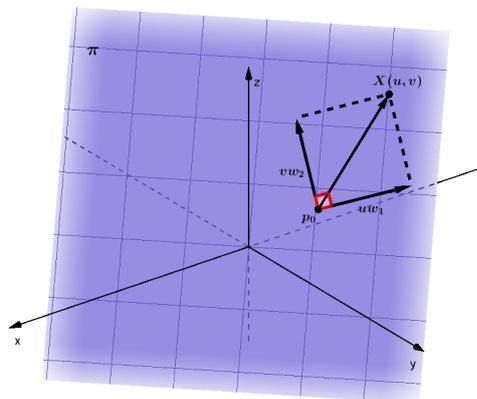
- (i) as derivadas parciais X_u, X_v, X_{uv}, X_{uu} e X_{vv} ;
- (ii) os coeficientes E, F e G da primeira forma fundamental de S ;
- (iii) a aplicação normal de Gauss $N : X(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$;
- (iv) os coeficientes e, f e g da segunda forma fundamental de S ;
- (v) a expressão geral para a curvatura Gaussiana K de S .

2.1 PLANO

Exemplo 2.1.1. *Vamos calcular a curvatura Gaussiana do plano π do Exemplo 1.4.1, onde $\pi \subset \mathbb{R}^3$ passa pelo ponto $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e contém os vetores ortonormais $w_1 = (a_1, a_2, a_3), w_2 = (b_1, b_2, b_3)$. Este plano (Figura 7) é coberto pela parametrização $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por*

$$X(u, v) = (x_0 + ua_1 + vb_1, y_0 + ua_2 + vb_2, z_0 + ua_3 + vb_3).$$

Figura 7 – Plano



Fonte: Autor.

(i) *Derivadas Parciais*

$$X_u = (a_1, a_2, a_3),$$

$$X_v = (b_1, b_2, b_3),$$

$$X_{uu} = (0, 0, 0),$$

$$X_{uv} = (0, 0, 0),$$

$$X_{vv} = (0, 0, 0).$$

(ii) *Coefficientes da Primeira Forma Fundamental*

Do Exemplo 1.4.1 concluímos que

$$E = 1, \quad F = 0 \quad e \quad G = 1.$$

(iii) *Aplicação Normal de Gauss*

Considerando $w_3 = (c_1, c_2, c_3) = X_u \wedge X_v$, então

$$N(u, v) = \left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}}, \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}}, \frac{c_3}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}} \right).$$

(iv) *Coefficientes da Segunda Forma Fundamental*

$$\begin{aligned} e &= \langle N, X_{uu} \rangle \\ &= \langle N, (0, 0, 0) \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f &= \langle N, X_{uv} \rangle \\ &= \langle N, (0, 0, 0) \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g &= \langle N, X_{vv} \rangle \\ &= \langle N, (0, 0, 0) \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

(v) *Curvatura Gaussiana*

$$\begin{aligned} K(u, v) &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\ &= \frac{0 \cdot 0 - 0^2}{1 \cdot 1 - 0^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

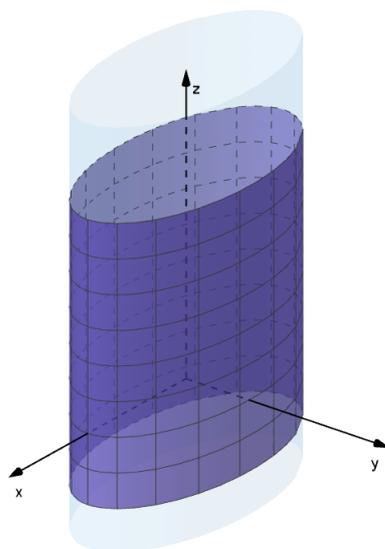
2.2 CILINDRO ELÍPTICO

Exemplo 2.2.1. Vamos calcular a curvatura Gaussiana do cilindro elíptico (Figura 8) coberto pela parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por (FREENSEL; DELGADO, 2008)

$$X(u, v) = (a \cos u, b \sin u, v),$$

onde $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < 2\pi \text{ e } v \in \mathbb{R}\}$.

Figura 8 – Cilindro Elíptico



Fonte: Autor.

(i) Derivadas Parciais

$$X_u = (-a \sin u, b \cos u, 0),$$

$$X_v = (0, 0, 1),$$

$$X_{uu} = (-a \cos u, -b \sin u, 0),$$

$$X_{uv} = (0, 0, 0),$$

$$X_{vv} = (0, 0, 0).$$

(ii) Coeficientes da Primeira Forma Fundamental

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle \\ &= |X_u|^2 \\ &= |(-a \sin u, b \cos u, 0)|^2 \\ &= (a \sin u)^2 + (b \cos u)^2. \end{aligned}$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle$$

$$\begin{aligned}
 &= \langle (-a \operatorname{sen} u, b \cos u, 0), (0, 0, 1) \rangle \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G &= \langle X_u, X_u \rangle \\
 &= |X_u|^2 \\
 &= |(0, 0, 1)|^2 \\
 &= (1)^2 \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

(iii) *Aplicação Normal de Gauss*

$$N(u, v) = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}.$$

Calculamos primeiramente $X_u \wedge X_v$.

$$\begin{aligned}
 X_u \wedge X_v &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a \operatorname{sen} u & b \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= (b \cos u) \vec{i} - (-a \operatorname{sen} u) \vec{j} + (0) \vec{k} \\
 &= (b \cos u) \vec{i} + (a \operatorname{sen} u) \vec{j} + (0) \vec{k} \\
 &= (b \cos u, a \operatorname{sen} u, 0).
 \end{aligned}$$

Agora calculamos $|X_u \wedge X_v|$.

$$|X_u \wedge X_v| = \sqrt{(b \cos u)^2 + (a \operatorname{sen} u)^2}.$$

Da Equação 1.3 temos que $|X_u \wedge X_v| = \sqrt{EG - F^2}$. Por outro lado, $EG - F^2$ é o denominador da Equação 1.9, por conta disso, a fim de tornar a expressão de K menos carregada possível, faremos recorrentemente a substituição

$$EG - F^2 = A,$$

ou seja, neste caso,

$$EG - F^2 = (b \cos u)^2 + (a \operatorname{sen} u)^2 = A.$$

Logo,

$$N(u, v) = \left(\frac{b \cos u}{\sqrt{A}}, \frac{a \operatorname{sen} u}{\sqrt{A}}, 0 \right).$$

(iv) *Coefficientes da Segunda Forma Fundamental*

$$\begin{aligned}
e &= \langle N, X_{uu} \rangle \\
&= \left\langle \left(\frac{b \cos u}{\sqrt{A}}, \frac{a \sin u}{\sqrt{A}}, 0 \right), (-a \cos u, -b \sin u, 0) \right\rangle \\
&= -\frac{ab \cos^2 u}{\sqrt{A}} - \frac{ab \sin^2 u}{\sqrt{A}} \\
&= -\frac{ab(\cos^2 u + \sin^2 u)}{\sqrt{A}} \\
&= -\frac{ab}{\sqrt{A}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f &= \langle N, X_{uv} \rangle \\
&= \left\langle \left(\frac{b \cos u}{\sqrt{A}}, \frac{a \sin u}{\sqrt{A}}, 0 \right), (0, 0, 0) \right\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g &= \langle N, X_{vv} \rangle \\
&= \left\langle \left(\frac{b \cos u}{\sqrt{A}}, \frac{a \sin u}{\sqrt{A}}, 0 \right), (0, 0, 0) \right\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(v) *Curvatura Gaussiana*

$$\begin{aligned}
K(u, v) &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\
&= \frac{-\frac{ab}{\sqrt{A}} \cdot 0 - 0^2}{A} \\
&= \frac{0}{A} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

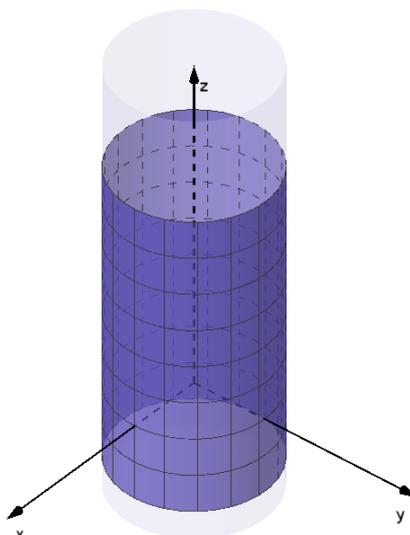
2.3 CILINDRO CIRCULAR

Exemplo 2.3.1. *Vamos calcular a curvatura Gaussiana do cilindro circular (Figura 9). O cilindro circular é um caso particular de cilindro elíptico no qual $a = b = r$ e a parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por*

$$X(u, v) = (r \cos u, r \sin u, v),$$

onde $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < 2\pi \text{ e } v \in \mathbb{R}\}$ cobre o cilindro circular.

Figura 9 – Cilindro Circular



Fonte: Autor.

(i) *Curvatura Gaussiana*

Como o cilindro circular é um caso particular de cilindro elíptico temos que a curvatura Gaussiana do cilindro circular pode ser obtida através da expressão de K para o cilindro elíptico, isto é, a curvatura Gaussiana do cilindro circular é dada por

$$K(u, v) = 0.$$

2.4 CILINDRO PARABÓLICO

Exemplo 2.4.1. Vamos calcular a curvatura Gaussiana do cilindro parabólico (Figura 10) coberto pela parametrização $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por (OLIVEIRA; RUFINO, 2004)

$$X(u, v) = (au^2, u, v).$$

(i) *Derivadas Parciais*

$$X_u = (2au, 1, 0),$$

$$X_v = (0, 0, 1),$$

$$X_{uu} = (2a, 0, 0),$$

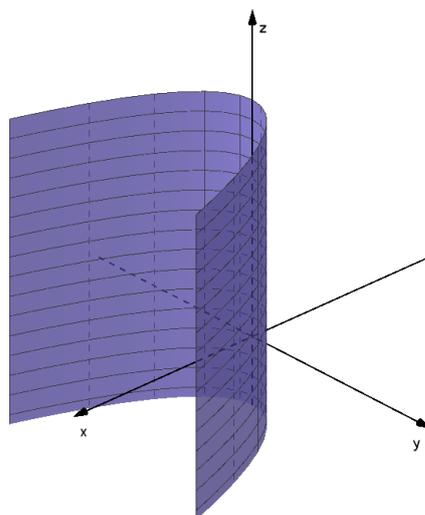
$$X_{uv} = (0, 0, 0),$$

$$X_{vv} = (0, 0, 0).$$

(ii) *Coefficientes da Primeira Forma Fundamental*

$$E = \langle X_u, X_u \rangle$$

Figura 10 – Cilindro Parabólico



Fonte: Autor.

$$\begin{aligned}
 &= |X_u|^2 \\
 &= |(2au, 1, 0)|^2 \\
 &= (2au)^2 + (1)^2 \\
 &= (2au)^2 + 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F &= \langle X_u, X_v \rangle \\
 &= \langle (2au, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G &= \langle X_v, X_v \rangle \\
 &= |X_v|^2 \\
 &= |(0, 0, 1)|^2 \\
 &= (1)^2 \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

(iii) *Aplicação Normal de Gauss*

$$N(u, v) = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}.$$

Calculamos primeiramente $X_u \wedge X_v$.

$$X_u \wedge X_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2au & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= (1)\vec{i} - (2au)\vec{j} + (0)\vec{k} \\
&= (1)\vec{i} + (-2au)\vec{j} + (0)\vec{k} \\
&= (1, -2au, 0).
\end{aligned}$$

Agora calculemos $|X_u \wedge X_v|$.

$$\begin{aligned}
|X_u \wedge X_v| &= \sqrt{(1)^2 + (-2au)^2} \\
&= \sqrt{1 + (2au)^2}.
\end{aligned}$$

Como $|X_u \wedge X_v| = \sqrt{EG - F^2}$,

$$EG - F^2 = 1 + (2au)^2 = A.$$

Logo,

$$N(u, v) = \left(\frac{1}{\sqrt{A}}, \frac{-2au}{\sqrt{A}}, 0 \right).$$

(iv) *Coefficientes da Segunda Forma Fundamental*

$$\begin{aligned}
e &= \langle N, X_{uu} \rangle \\
&= \left\langle \left(\frac{1}{\sqrt{A}}, \frac{-2au}{\sqrt{A}}, 0 \right), (2a, 0, 0) \right\rangle \\
&= \frac{2a}{\sqrt{A}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f &= \langle N, X_{uv} \rangle \\
&= \left\langle \left(\frac{1}{\sqrt{A}}, \frac{-2au}{\sqrt{A}}, 0 \right), (0, 0, 0) \right\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g &= \langle N, X_{vv} \rangle \\
&= \left\langle \left(\frac{1}{\sqrt{A}}, \frac{-2au}{\sqrt{A}}, 0 \right), (0, 0, 0) \right\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(v) *Curvatura Gaussiana*

$$\begin{aligned}
K(u, v) &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\
&= \frac{\frac{2a}{\sqrt{A}} \cdot 0 - 0^2}{A} \\
&= \frac{0}{A} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

2.5 CILINDRO HIPERBÓLICO DE DUAS FOLHAS

Exemplo 2.5.1. Vamos calcular a curvatura Gaussiana do cilindro hiperbólico de duas folhas (Figura 11) coberto pela parametrização $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por (OLIVEIRA; RUFINO, 2004)

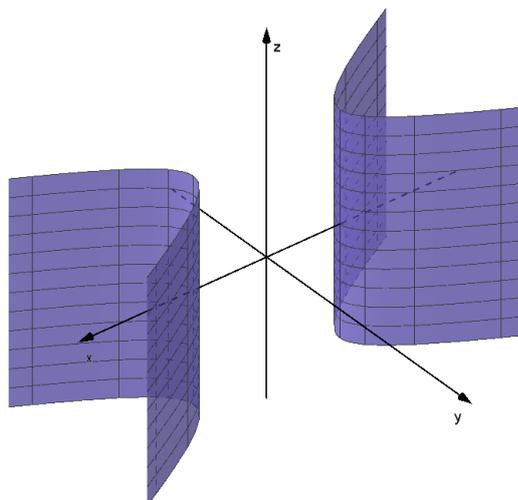
$$X(u, v) = (a \cosh u, b \sinh u, v).$$

Observação 2.5.1. A parametrização X cobre apenas uma folha do cilindro hiperbólico. A outra folha é obtida através da parametrização \bar{X} definida por

$$\bar{X}(u, v) = (-a \cosh u, -b \sinh u, v).$$

Verifica-se que se utilizarmos a parametrização \bar{X} obteremos a mesma curvatura Gaussiana.

Figura 11 – Cilindro Hiperbólico de Duas Folhas



Fonte: Autor.

(i) Derivadas Parciais

$$X_u = (a \sinh u, b \cosh u, 0),$$

$$X_v = (0, 0, 1),$$

$$X_{uu} = (a \cosh u, b \sinh u, 0),$$

$$X_{uv} = (0, 0, 0),$$

$$X_{vv} = (0, 0, 0).$$

(ii) Coeficientes da Primeira Forma Fundamental

$$E = \langle X_u, X_u \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= |X_u|^2 \\
&= |(a \sinh u, b \cosh u, 0)|^2 \\
&= (a \sinh u)^2 + (b \cosh u)^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F &= \langle X_u, X_v \rangle \\
&= \langle (a \sinh u, b \cosh u, 0), (0, 0, 1) \rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G &= \langle X_v, X_v \rangle \\
&= |X_v|^2 \\
&= |(0, 0, 1)|^2 \\
&= (1)^2 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

(iii) *Aplicação Normal de Gauss*

$$N(u, v) = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}.$$

Calculamos primeiramente $X_u \wedge X_v$.

$$\begin{aligned}
X_u \wedge X_v &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a \sinh u & b \cosh u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (b \cosh u) \vec{i} - (a \sinh u) \vec{j} + (0) \vec{k} \\
&= (b \cosh u) \vec{i} + (-a \sinh u) \vec{j} + (0) \vec{k} \\
&= (b \cosh u, -a \sinh u, 0).
\end{aligned}$$

Agora calculamos $|X_u \wedge X_v|$.

$$\begin{aligned}
|X_u \wedge X_v| &= \sqrt{(b \cosh u)^2 + (-a \sinh u)^2} \\
&= \sqrt{(b \cosh u)^2 + (a \sinh u)^2}.
\end{aligned}$$

Como $|X_u \wedge X_v| = \sqrt{EG - F^2}$,

$$EG - F^2 = (b \cosh u)^2 + (a \sinh u)^2 = A.$$

Logo,

$$N(u, v) = \left(\frac{b \cosh u}{\sqrt{A}}, \frac{-a \sinh u}{\sqrt{A}}, 0 \right).$$

(iv) Coeficientes da Segunda Forma Fundamental

$$\begin{aligned}
e &= \langle N, X_{uu} \rangle \\
&= \left\langle \left(\frac{b \cosh u}{\sqrt{A}}, \frac{-a \sinh u}{\sqrt{A}}, 0 \right), (a \cosh u, b \sinh u, 0) \right\rangle \\
&= \frac{ab \cosh^2 u}{\sqrt{A}} - \frac{ab \sinh^2 u}{\sqrt{A}} \\
&= \frac{ab(\cosh^2 u - \sinh^2 u)}{\sqrt{A}} \\
&= \frac{ab}{\sqrt{A}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f &= \langle N, X_{uv} \rangle \\
&= \left\langle \left(\frac{b \cosh u}{\sqrt{A}}, \frac{-a \sinh u}{\sqrt{A}}, 0 \right), (0, 0, 0) \right\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g &= \langle N, X_{vv} \rangle \\
&= \left\langle \left(\frac{b \cosh u}{\sqrt{A}}, \frac{-a \sinh u}{\sqrt{A}}, 0 \right), (0, 0, 0) \right\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(v) Curvatura Gaussiana

$$\begin{aligned}
K(u, v) &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\
&= \frac{\frac{ab}{\sqrt{A}} \cdot 0 - 0^2}{A} \\
&= \frac{0}{A} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

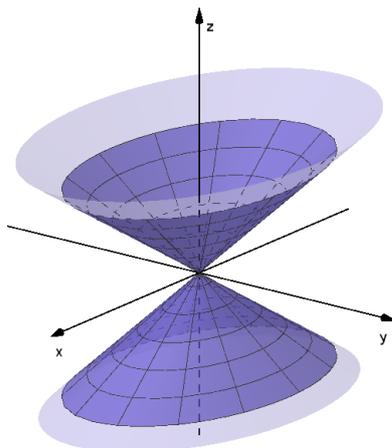
2.6 CONE ELÍPTICO

Exemplo 2.6.1. Vamos calcular a curvatura Gaussiana do Cone Elíptico (Figura 12) coberto pela parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por (OLIVEIRA; RUFINO, 2004)

$$X(u, v) = (au \cos v, bu \sin v, u),$$

onde $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u \in \mathbb{R} \text{ e } 0 < v < 2\pi\}$.

Figura 12 – Cone Elíptico



Fonte: Autor.

(i) Derivadas Parciais

$$X_u = (a \cos v, b \operatorname{sen} v, 1),$$

$$X_v = (-au \operatorname{sen} v, bu \cos v, 0),$$

$$X_{uu} = (0, 0, 0),$$

$$X_{uv} = (-a \operatorname{sen} v, b \cos v, 0),$$

$$X_{vv} = (-au \cos v, -bu \operatorname{sen} v, 0).$$

(ii) Coeficientes da Primeira Forma Fundamental

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle = |X_u|^2 \\ &= |(a \cos v, b \operatorname{sen} v, 1)|^2 \\ &= (a \cos v)^2 + (b \operatorname{sen} v)^2 + (1)^2 \\ &= (a \cos v)^2 + (b \operatorname{sen} v)^2 + 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= \langle X_u, X_v \rangle \\ &= \langle (a \cos v, b \operatorname{sen} v, 1), (-au \operatorname{sen} v, bu \cos v, 0) \rangle \\ &= -a^2 u \cos v \operatorname{sen} v + b^2 u \operatorname{sen} v \cos v \\ &= (u \cos v \operatorname{sen} v)(b^2 - a^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &= \langle X_v, X_v \rangle = |X_v|^2 \\ &= |(-au \operatorname{sen} v, bu \cos v, 0)|^2 \\ &= (-au \operatorname{sen} v)^2 + (bu \cos v)^2 \\ &= (au \operatorname{sen} v)^2 + (bu \cos v)^2. \end{aligned}$$

(iii) *Aplicação Normal de Gauss*

$$N(u, v) = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}.$$

Calculamos primeiramente $X_u \wedge X_v$.

$$\begin{aligned} X_u \wedge X_v &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a \cos v & b \operatorname{sen} v & 1 \\ -au \operatorname{sen} v & bu \cos v & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-bu \cos v) \vec{i} - (au \operatorname{sen} v) \vec{j} + (abu \cos^2 v + abu \operatorname{sen}^2 v) \vec{k} \\ &= (-bu \cos v) \vec{i} + (-au \operatorname{sen} v) \vec{j} + (abu(\cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v)) \vec{k} \\ &= (-bu \cos v) \vec{i} + (-au \operatorname{sen} v) \vec{j} + (abu) \vec{k} \\ &= (-bu \cos v, -au \operatorname{sen} v, abu). \end{aligned}$$

Agora calculamos $|X_u \wedge X_v|$.

$$|X_u \wedge X_v| = \sqrt{(-bu \cos v)^2 + (-au \operatorname{sen} v)^2 + (abu)^2}.$$

Como $|X_u \wedge X_v| = \sqrt{EG - F^2}$,

$$EG - F^2 = (-bu \cos v)^2 + (-au \operatorname{sen} v)^2 + (abu)^2 = A.$$

Logo,

$$N(u, v) = \left(\frac{-bu \cos v}{\sqrt{A}}, \frac{-au \operatorname{sen} v}{\sqrt{A}}, \frac{abu}{\sqrt{A}} \right).$$

(iv) *Coefficientes da Segunda Forma Fundamental*

$$\begin{aligned} e &= \langle N, X_{uu} \rangle \\ &= \left\langle \left(\frac{-bu \cos v}{\sqrt{A}}, \frac{-au \operatorname{sen} v}{\sqrt{A}}, \frac{abu}{\sqrt{A}} \right), (0, 0, 0) \right\rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f &= \langle N, X_{uv} \rangle \\ &= \left\langle \left(\frac{-bu \cos v}{\sqrt{A}}, \frac{-au \operatorname{sen} v}{\sqrt{A}}, \frac{abu}{\sqrt{A}} \right), (-a \operatorname{sen} v, b \cos v, 0) \right\rangle \\ &= \frac{abu \cos v \operatorname{sen} v}{\sqrt{A}} - \frac{abu \operatorname{sen} v \cos v}{\sqrt{A}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g &= \langle N, X_{vv} \rangle \\
 &= \left\langle \left(\frac{-bu \cos v}{\sqrt{A}}, \frac{-au \sin v}{\sqrt{A}}, \frac{abu}{\sqrt{A}} \right), (-au \cos v, -bu \sin v, 0) \right\rangle \\
 &= \frac{abu^2 \cos^2 v}{\sqrt{A}} + \frac{abu^2 \sin^2 v}{\sqrt{A}} \\
 &= \frac{abu^2(\cos^2 v + \sin^2 v)}{\sqrt{A}} \\
 &= \frac{abu^2}{\sqrt{A}}.
 \end{aligned}$$

(v) *Curvatura Gaussiana*

$$\begin{aligned}
 K(u, v) &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\
 &= \frac{0 \cdot \frac{abu^2}{\sqrt{A}} - 0^2}{A} \\
 &= \frac{0}{A} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

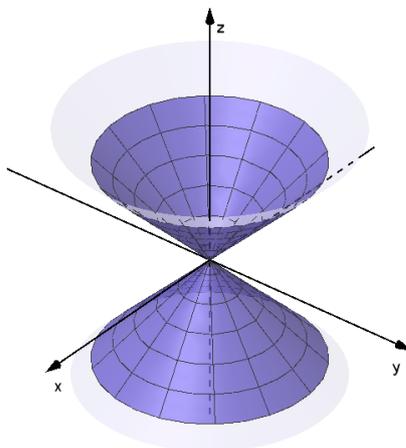
2.7 CONE CIRCULAR

Exemplo 2.7.1. Vamos calcular a curvatura Gaussiana do cone circular (Figura 13). O cone circular é um caso particular de cone elíptico no qual $a = b = r$ e a parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$X(u, v) = (ru \cos v, ru \sin v, u),$$

onde $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u \in \mathbb{R} \text{ e } 0 < v < 2\pi\}$ cobre o cone circular.

Figura 13 – Cone Circular



Fonte: Autor.

(i) *Curvatura Gaussiana*

Como o cone circular é um caso particular de cone elíptico temos que a curvatura Gaussiana do cone circular pode ser obtida através da expressão de K para o cone elíptico, isto é, a curvatura Gaussiana do cone circular é dada por

$$K(u, v) = 0.$$

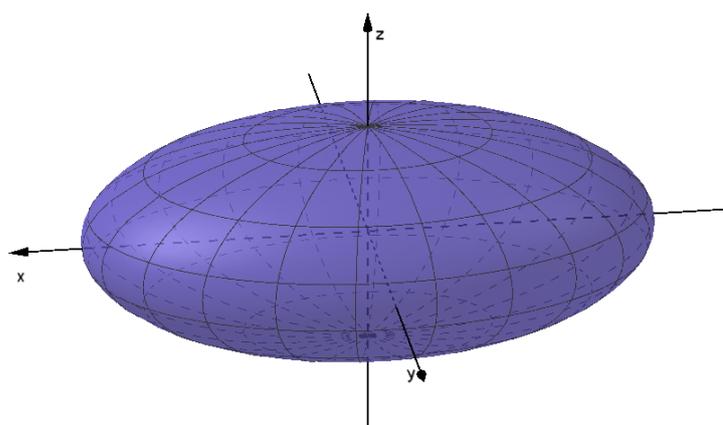
2.8 ELIPSÓIDE

Exemplo 2.8.1. Vamos calcular a curvatura Gaussiana do elipsóide (Figura 14) coberto pela parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por (OLIVEIRA; RUFINO, 2004)

$$X(u, v) = (a \operatorname{sen} v \cos u, b \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, c \cos v),$$

onde $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < 2\pi \text{ e } 0 < v < \pi\}$.

Figura 14 – Elipsóide



Fonte: Autor.

(i) *Derivadas Parciais*

$$X_u = (-a \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, b \operatorname{sen} v \cos u, 0),$$

$$X_v = (a \cos v \cos u, b \cos v \operatorname{sen} u, -c \operatorname{sen} v),$$

$$X_{uu} = (-a \operatorname{sen} v \cos u, -b \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, 0),$$

$$X_{uv} = (-a \cos v \operatorname{sen} u, b \cos v \cos u, 0),$$

$$X_{vv} = (-a \operatorname{sen} v \cos u, -b \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, -c \cos v).$$

(ii) *Coefficientes da Primeira Forma Fundamental*

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle = |X_u|^2 \\ &= |(-a \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, b \operatorname{sen} v \cos u, 0)|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-a \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u)^2 + (b \operatorname{sen} v \cos u)^2 \\
&= (a \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u)^2 + (b \operatorname{sen} v \cos u)^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F &= \langle X_u, X_v \rangle, \\
&= \langle (-a \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, b \operatorname{sen} v \cos u, 0), (a \cos v \cos u, b \cos v \operatorname{sen} u, -c \operatorname{sen} v) \rangle \\
&= -a^2 \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u \cos v \cos u + b^2 \operatorname{sen} u \cos u \cos v \operatorname{sen} u \\
&= (\operatorname{sen} v \operatorname{sen} u \cos v \cos u)(b^2 - a^2).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G &= \langle X_v, X_v \rangle = |X_v|^2 \\
&= |(a \cos v \cos u, b \cos v \operatorname{sen} u, -c \operatorname{sen} v)|^2 \\
&= (a \cos v \cos u)^2 + (b \cos v \operatorname{sen} u)^2 + (-c \operatorname{sen} v)^2 \\
&= (a \cos v \cos u)^2 + (b \cos v \operatorname{sen} u)^2 + (c \operatorname{sen} v)^2.
\end{aligned}$$

(iii) *Aplicação Normal de Gauss*

$$N(u, v) = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}.$$

Calculemos primeiramente $X_u \wedge X_v$.

$$\begin{aligned}
X_u \wedge X_v &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u & b \operatorname{sen} v \cos u & 0 \\ a \cos v \cos u & b \cos v \operatorname{sen} u & -c \operatorname{sen} v \end{vmatrix} \\
&= (-bc \operatorname{sen}^2 v \cos u) \vec{i} - (ac \operatorname{sen}^2 v \operatorname{sen} u) \vec{j} \\
&\quad + (-ab \operatorname{sen} v \cos v \operatorname{sen}^2 u - ab \operatorname{sen} v \cos v \cos^2 u) \vec{k} \\
&= (-bc \operatorname{sen}^2 v \cos u) \vec{i} + (-ac \operatorname{sen}^2 v \operatorname{sen} u) \vec{j} \\
&\quad + (-ab \operatorname{sen} v \cos v (\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u)) \vec{k} \\
&= (-bc \operatorname{sen}^2 v \cos u) \vec{i} + (-ac \operatorname{sen}^2 v \operatorname{sen} u) \vec{j} + (-ab \operatorname{sen} v \cos v) \vec{k} \\
&= (-bc \operatorname{sen}^2 v \cos u, -ac \operatorname{sen}^2 v \operatorname{sen} u, -ab \operatorname{sen} v \cos v).
\end{aligned}$$

Agora calculemos $|X_u \wedge X_v|$.

$$\begin{aligned}
|X_u \wedge X_v| &= \sqrt{(-bc \operatorname{sen}^2 v \cos u)^2 + (-ac \operatorname{sen}^2 v \operatorname{sen} u)^2 + (-ab \operatorname{sen} v \cos v)^2} \\
&= \sqrt{(bc \operatorname{sen}^2 v \cos u)^2 + (ac \operatorname{sen}^2 v \operatorname{sen} u)^2 + (ab \operatorname{sen} v \cos v)^2} \\
&= \sqrt{\operatorname{sen}^2 v (bc \operatorname{sen} v \cos u)^2 + \operatorname{sen}^2 v (ac \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u)^2 + \operatorname{sen}^2 v (ab \cos v)^2} \\
&= \sqrt{\operatorname{sen}^2 v [(bc \operatorname{sen} v \cos u)^2 + (ac \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u)^2 + (ab \cos v)^2]}.
\end{aligned}$$

Como $|X_u \wedge X_v| = \sqrt{EG - F^2}$,

$$EG - F^2 = \operatorname{sen}^2 v [(bc \operatorname{sen} v \cos u)^2 + (ac \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u)^2 + (ab \cos v)^2].$$

Fazendo $A = (bc \sen v \cos u)^2 + (ac \sen v \sen u)^2 + (ab \cos v)^2 > 0$, obtemos

$$EG - F^2 = \sen^2 v A.$$

Assim,

$$\begin{aligned} N(u, v) &= \left(\frac{-bc \sen^2 v \cos u}{\sqrt{\sen^2 v A}}, \frac{-ac \sen^2 v \sen u}{\sqrt{\sen^2 v A}}, \frac{-ab \sen v \cos v}{\sqrt{\sen^2 v A}} \right) \\ &= \left(\frac{-bc \sen^2 v \cos u}{|\sen v| \sqrt{A}}, \frac{-ac \sen^2 v \sen u}{|\sen v| \sqrt{A}}, \frac{-ab \sen v \cos v}{|\sen v| \sqrt{A}} \right). \end{aligned}$$

Como $0 < v < \pi$ então $\sen v > 0$ e assim $|\sen v| = \sen v$. Logo,

$$N(u, v) = \left(\frac{-bc \sen v \cos u}{\sqrt{A}}, \frac{-ac \sen v \sen u}{\sqrt{A}}, \frac{-ab \cos v}{\sqrt{A}} \right).$$

(iv) Coeficientes da Segunda Forma Fundamental

$$\begin{aligned} e &= \langle N, X_{uu} \rangle \\ &= \left\langle \left(\frac{-bc \sen v \cos u}{\sqrt{A}}, \frac{-ac \sen v \sen u}{\sqrt{A}}, \frac{-ab \cos v}{\sqrt{A}} \right), (-a \sen v \cos u, -b \sen v \sen u, 0) \right\rangle \\ &= \frac{abc \sen^2 v \cos^2 u}{\sqrt{A}} + \frac{abc \sen^2 v \sen^2 u}{\sqrt{A}} \\ &= \frac{abc \sen^2 v (\cos^2 u + \sen^2 u)}{\sqrt{A}} \\ &= \frac{abc \sen^2 v}{\sqrt{A}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f &= \langle N, X_{uv} \rangle \\ &= \left\langle \left(\frac{-bc \sen v \cos u}{\sqrt{A}}, \frac{-ac \sen v \sen u}{\sqrt{A}}, \frac{-ab \cos v}{\sqrt{A}} \right), (-a \cos v \sen u, b \cos v \cos u, 0) \right\rangle \\ &= \frac{abc \sen v \cos u \cos v \sen u}{\sqrt{A}} - \frac{abc \sen v \sen u \cos v \cos u}{\sqrt{A}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g &= \langle N, X_{vv} \rangle \\ &= \left\langle \left(\frac{-bc \sen v \cos u}{\sqrt{A}}, \frac{-ac \sen v \sen u}{\sqrt{A}}, \frac{-ab \cos v}{\sqrt{A}} \right) \right. \\ &\quad \left. (-a \sen v \cos u, -b \sen v \sen u, -c \cos v) \right\rangle \\ &= \frac{abc \sen^2 v \cos^2 u}{\sqrt{A}} + \frac{abc \sen^2 v \sen^2 u}{\sqrt{A}} + \frac{abc \cos^2 v}{\sqrt{A}} \\ &= \frac{abc \sen^2 v (\cos^2 u + \sen^2 u)}{\sqrt{A}} + \frac{abc \cos^2 v}{\sqrt{A}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{abc(\sin^2 v + \cos^2 v)}{\sqrt{A}} \\
&= \frac{abc}{\sqrt{A}}.
\end{aligned}$$

(v) *Curvatura Gaussiana*

$$\begin{aligned}
K(u, v) &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\
&= \frac{\frac{abc \sin^2 v}{\sqrt{A}} \cdot \frac{abc}{\sqrt{A}} - (0)^2}{\frac{abc^2 \sin^2 v}{\sin^2 v A}} \\
&= \frac{A}{\sin^2 v A} \\
&= \frac{(abc)^2 \sin^2 v}{A} \cdot \frac{1}{\sin^2 v A} \\
&= \frac{(abc)^2}{A^2} \\
&= \frac{(abc)^2}{[(bc \sin v \cos u)^2 + (ac \sin v \sin u)^2 + (ab \cos v)^2]^2}.
\end{aligned}$$

2.9 ESFERA

Exemplo 2.9.1. *Vamos calcular a curvatura Gaussiana da esfera (Figura 15). A esfera é um caso particular de elipsóide no qual $a = b = c = r$ e a parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por*

$$X(u, v) = (r \sin v \cos u, r \sin v \sin u, r \cos v),$$

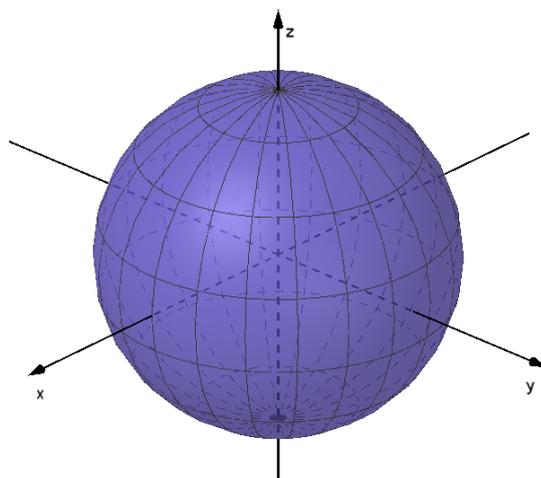
onde $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < 2\pi \text{ e } 0 < v < \pi\}$ cobre a esfera.

(i) *Curvatura Gaussiana*

Como a esfera é um caso particular de elipsóide temos que a curvatura Gaussiana da esfera de raio r pode ser obtida através da expressão de K para o elipsóide, isto é, a curvatura Gaussiana da esfera é dada por

$$\begin{aligned}
K(u, v) &= \frac{(abc)^2}{[(bc \sin v \cos u)^2 + (ac \sin v \sin u)^2 + (ab \cos v)^2]^2} \\
&= \frac{(r \cdot r \cdot r)^2}{[(r \cdot r \sin v \cos u)^2 + (r \cdot r \sin v \sin u)^2 + (r \cdot r \cos v)^2]^2} \\
&= \frac{(r^3)^2}{[(r^2 \sin v \cos u)^2 + (r^2 \sin v \sin u)^2 + (r^2 \cos v)^2]^2} \\
&= \frac{r^6}{[r^4 \sin^2 v \cos^2 u + r^4 \sin^2 v \sin^2 u + r^4 \cos^2 v]^2}
\end{aligned}$$

Figura 15 – Esfera



Fonte: Autor.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{r^6}{[r^4 \operatorname{sen}^2 v (\cos^2 u + \operatorname{sen}^2 u) + r^4 \cos^2 v]^2} \\
 &= \frac{r^6}{[r^4 (\operatorname{sen}^2 v + \cos^2 v)]^2} \\
 &= \frac{r^6}{r^8} \\
 &= \frac{1}{r^2}.
 \end{aligned}$$

2.10 HIPERBOLÓIDE ELÍPTICO DE UMA FOLHA

Exemplo 2.10.1. Vamos calcular a curvatura Gaussiana do hiperbolóide elíptico de uma folha (Figura 16) coberto pela parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por (FRENSSEL; DELGADO, 2008)

$$X(u, v) = (a \cosh u \cos v, b \cosh u \operatorname{sen} v, c \sinh u),$$

onde $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u \in \mathbb{R} \text{ e } 0 < v < 2\pi\}$.

(i) Derivadas Parciais

$$X_u = (a \sinh u \cos v, b \sinh u \operatorname{sen} v, c \cosh u),$$

$$X_v = (-a \cosh u \operatorname{sen} v, b \cosh u \cos v, 0),$$

$$X_{uu} = (a \cosh u \cos v, b \cosh u \operatorname{sen} v, c \sinh u),$$

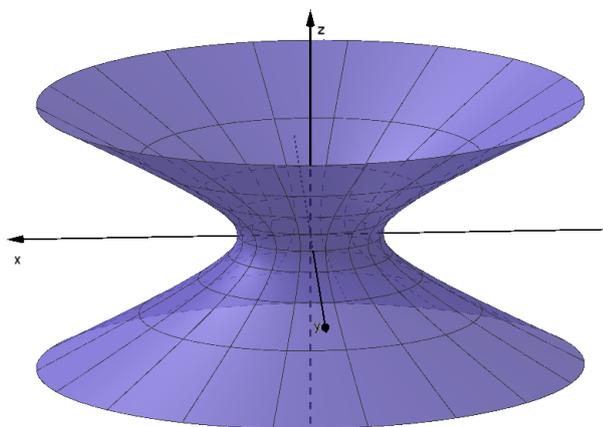
$$X_{uv} = (-a \sinh u \operatorname{sen} v, b \sinh u \cos v, 0),$$

$$X_{vv} = (-a \cosh u \cos v, -b \cosh u \operatorname{sen} v, 0).$$

(ii) Coeficientes da Primeira Forma Fundamental

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = |X_u|^2$$

Figura 16 – Hiperbolóide Elíptico de Uma Folha



Fonte: Autor.

$$\begin{aligned} &= |(a \sinh u \cos v, b \sinh u \sin v, c \cosh u)|^2 \\ &= (a \sinh u \cos v)^2 + (b \sinh u \sin v)^2 + (c \cosh u)^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= \langle X_u, X_v \rangle \\ &= \langle (a \sinh u \cos v, b \sinh u \sin v, c \cosh u), (-a \cosh u \sin v, b \cosh u \cos v, 0) \rangle \\ &= -a^2 \sinh u \cos v \cosh u \sin v + b^2 \sinh u \sin v \cosh u \cos v \\ &= (\sinh u \cos v \cosh u \sin v)(b^2 - a^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &= \langle X_v, X_v \rangle = |X_v|^2 \\ &= |(-a \cosh u \sin v, b \cosh u \cos v, 0)|^2 \\ &= (-a \cosh u \sin v)^2 + (b \cosh u \cos v)^2 \\ &= (a \cosh u \sin v)^2 + (b \cosh u \cos v)^2. \end{aligned}$$

(iii) *Aplicação Normal de Gauss*

$$N(u, v) = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}.$$

Calculamos primeiramente $X_u \wedge X_v$.

$$\begin{aligned} X_u \wedge X_v &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a \sinh u \cos v & b \sinh u \sin v & c \cosh u \\ -a \cosh u \sin v & b \cosh u \cos v & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-bc \cosh^2 u \cos v) \vec{i} - (ac \cosh^2 u \sin v) \vec{j} \\ &\quad + (ab \sinh u \cosh u \cos^2 v - ab \cosh u \sinh u \sin^2 v) \vec{k} \\ &= (-bc \cosh^2 u \cos v) \vec{i} + (-ac \cosh^2 u \sin v) \vec{j} \\ &\quad + (ab \sinh u \cosh u (\cos^2 v + \sin^2 v)) \vec{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (-bc \cosh^2 u \cos v) \vec{i} + (-ac \cosh^2 u \sin v) \vec{j} + (ab \sinh u \cosh u) \vec{k} \\
 &= (-bc \cosh^2 u \cos v, -ac \cosh^2 u \sin v, ab \sinh u \cosh u).
 \end{aligned}$$

Agora calculemos $|X_u \wedge X_v|$.

$$\begin{aligned}
 |X_u \wedge X_v| &= \sqrt{(-bc \cosh^2 u \cos v)^2 + (-ac \cosh^2 u \sin v)^2 + (ab \sinh u \cosh u)^2} \\
 &= \sqrt{(bc \cosh^2 u \cos v)^2 + (ac \cosh^2 u \sin v)^2 + (ab \sinh u \cosh u)^2} \\
 &= \sqrt{\cosh^2 u (bc \cosh u \cos v)^2 + \cosh^2 u (ac \cosh u \sin v)^2 + \cosh^2 u (ab \sinh u)^2} \\
 &= \sqrt{\cosh^2 u [(bc \cosh u \cos v)^2 + (ac \cosh u \sin v)^2 + (ab \sinh u)^2]}.
 \end{aligned}$$

Como $|X_u \wedge X_v| = \sqrt{EG - F^2}$,

$$EG - F^2 = \cosh^2 u [(bc \cosh u \cos v)^2 + (ac \cosh u \sin v)^2 + (ab \sinh u)^2].$$

Fazendo $A = (bc \cosh u \cos v)^2 + (ac \cosh u \sin v)^2 + (ab \sinh u)^2 > 0$, obtemos

$$EG - F^2 = \cosh^2 u A.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 N(u, v) &= \left(\frac{-bc \cosh^2 u \cos v}{\sqrt{\cosh^2 u A}}, \frac{-ac \cosh^2 u \sin v}{\sqrt{\cosh^2 u A}}, \frac{ab \sinh u \cosh u}{\sqrt{\cosh^2 u A}} \right) \\
 &= \left(\frac{-bc \cosh^2 u \cos v}{|\cosh u| \sqrt{A}}, \frac{-ac \cosh^2 u \sin v}{|\cosh u| \sqrt{A}}, \frac{ab \sinh u \cosh u}{|\cosh u| \sqrt{A}} \right).
 \end{aligned}$$

Como $\cosh u > 0$ para todo $u \in \mathbb{R}$, então $|\cosh u| = \cosh u$. Logo,

$$N(u, v) = \left(\frac{-bc \cosh u \cos v}{\sqrt{A}}, \frac{-ac \cosh u \sin v}{\sqrt{A}}, \frac{ab \sinh u}{\sqrt{A}} \right).$$

(iv) *Coefficientes da Segunda Forma Fundamental*

$$\begin{aligned}
 e &= \langle N, X_{uu} \rangle \\
 &= \left\langle \left(\frac{-bc \cosh u \cos v}{\sqrt{A}}, \frac{-ac \cosh u \sin v}{\sqrt{A}}, \frac{ab \sinh u}{\sqrt{A}} \right) \right. \\
 &\quad \left. (a \cosh u \cos v, b \cosh u \sin v, c \sinh u) \right\rangle \\
 &= -\frac{abc \cosh^2 u \cos^2 v}{\sqrt{A}} - \frac{abc \cosh^2 u \sin^2 v}{\sqrt{A}} + \frac{abc \sinh^2 u}{\sqrt{A}} \\
 &= -\frac{abc \cosh^2 u (\cos^2 v + \sin^2 v)}{\sqrt{A}} + \frac{abc \sinh^2 u}{\sqrt{A}} \\
 &= -\frac{abc}{\sqrt{A}} \cdot (\cosh^2 u - \sinh^2 u)
 \end{aligned}$$

$$= -\frac{abc}{\sqrt{A}}.$$

$$\begin{aligned} f &= \langle N, X_{uv} \rangle \\ &= \left\langle \left(\frac{-bc \cosh u \cos v}{\sqrt{A}}, \frac{-ac \cosh u \sen v}{\sqrt{A}}, \frac{ab \sinh u}{\sqrt{A}} \right) \right. \\ &\quad \left. (-a \sinh u \sen v, b \sinh u \cos v, 0) \right\rangle \\ &= \frac{abc \cosh u \cos v \sinh u \sen v}{\sqrt{A}} - \frac{abc \cosh u \sen v \sinh u \cos v}{\sqrt{A}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g &= \langle N, X_{vv} \rangle \\ &= \left\langle \left(\frac{-bc \cosh u \cos v}{\sqrt{A}}, \frac{-ac \cosh u \sen v}{\sqrt{A}}, \frac{ab \sinh u}{\sqrt{A}} \right) \right. \\ &\quad \left. (-a \cosh u \cos v, -b \cosh u \sen v, 0) \right\rangle \\ &= \frac{abc \cosh^2 u \cos^2 v}{\sqrt{A}} + \frac{abc \cosh^2 u \sen^2 v}{\sqrt{A}} \\ &= \frac{abc \cosh^2 u (\cos^2 v + \sen^2 v)}{\sqrt{A}} \\ &= \frac{abc \cosh^2 u}{\sqrt{A}}. \end{aligned}$$

(v) *Curvatura Gaussiana*

$$\begin{aligned} K(u, v) &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\ &= \frac{-\frac{abc}{\sqrt{A}} \cdot \frac{abc \cosh^2 u}{\sqrt{A}} - (0)^2}{\cosh^2 u A} \\ &= \frac{-(abc)^2 \cosh^2 u}{A} \\ &= -\frac{(abc)^2 \cosh^2 u}{A} \cdot \frac{1}{\cosh^2 u A} \\ &= -\frac{(abc)^2}{A^2} \\ &= -\frac{(abc)^2}{[(bc \cosh u \cos v)^2 + (ac \cosh u \sen v)^2 + (ab \sinh u)^2]^2}. \end{aligned}$$

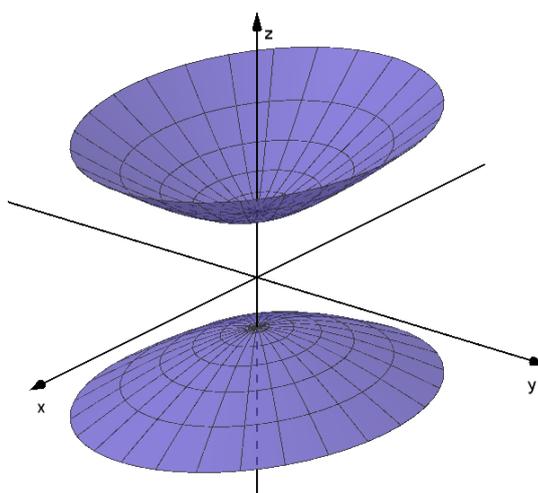
2.11 HIPERBOLÓIDE ELÍPTICO DE DUAS FOLHAS

Exemplo 2.11.1. Vamos calcular a curvatura Gaussiana do hiperbolóide elíptico de duas folhas (Figura 17) coberto pela parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por (FRENSEL; DELGADO, 2008)

$$X(u, v) = (a \sinh u \cos v, b \sinh u \sin v, c \cosh u),$$

onde $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u \in \mathbb{R} \text{ e } 0 < v < \pi\}$.

Figura 17 – Hiperbolóide Elíptico de Duas Folhas



Fonte: Autor.

Observação 2.11.1. A parametrização X cobre apenas uma folha do hiperbolóide. A outra folha é obtida através da parametrização \bar{X} definida por

$$\bar{X}(u, v) = (a \sinh u \cos v, b \sinh u \sin v, -c \cosh u).$$

Verifica-se que se utilizarmos a parametrização \bar{X} obteremos a mesma curvatura Gaussiana.

(i) Derivadas Parciais

$$X_u = (a \cosh u \cos v, b \cosh u \sin v, c \sinh u),$$

$$X_v = (-a \sinh u \sin v, b \sinh u \cos v, 0),$$

$$X_{uu} = (a \sinh u \cos v, b \sinh u \sin v, c \cosh u),$$

$$X_{uv} = (-a \cosh u \sin v, b \cosh u \cos v, 0),$$

$$X_{vv} = (-a \sinh u \cos v, -b \sinh u \sin v, 0).$$

(ii) Coeficientes da Primeira Forma Fundamental

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = |X_u|^2$$

$$\begin{aligned}
&= |(a \cosh u \cos v, b \cosh u \sin v, c \sinh u)|^2 \\
&= (a \cosh u \cos v)^2 + (b \cosh u \sin v)^2 + (c \sinh u)^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F &= \langle X_u, X_v \rangle \\
&= \langle (a \cosh u \cos v, b \cosh u \sin v, c \sinh u), (-a \sinh u \sin v, b \sinh u \cos v, 0) \rangle \\
&= -a^2 \cosh u \cos v \sinh u \sin v + b^2 \cosh u \sin v \sinh u \cos v \\
&= (\cosh u \cos v \sinh u \sin v)(b^2 - a^2).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G &= \langle X_v, X_v \rangle = |X_v|^2 \\
&= |(-a \sinh u \sin v, b \sinh u \cos v, 0)|^2 \\
&= (-a \sinh u \sin v)^2 + (b \sinh u \cos v)^2 \\
&= (a \sinh u \sin v)^2 + (b \sinh u \cos v)^2.
\end{aligned}$$

(iii) *Aplicação Normal de Gauss*

$$N(u, v) = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}.$$

Calculemos primeiramente $X_u \wedge X_v$.

$$\begin{aligned}
X_u \wedge X_v &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a \cosh u \cos v & b \cosh u \sin v & c \sinh u \\ -a \sinh u \sin v & b \sinh u \cos v & 0 \end{vmatrix} \\
&= (-bc \sinh^2 u \cos v) \vec{i} - (ac \sinh^2 u \sin v) \vec{j} \\
&\quad + (ab \cosh u \sinh u \cos^2 v + ab \cosh u \sinh u \sin^2 v) \vec{k} \\
&= (-bc \sinh^2 u \cos v) \vec{i} + (-ac \sinh^2 u \sin v) \vec{j} \\
&\quad + (ab \cosh u \sinh u (\cos^2 v + \sin^2 v)) \vec{k} \\
&= (-bc \sinh^2 u \cos v) \vec{i} + (-ac \sinh^2 u \sin v) \vec{j} + (ab \cosh u \sinh u) \vec{k} \\
&= (-bc \sinh^2 u \cos v, -ac \sinh^2 u \sin v, ab \cosh u \sinh u).
\end{aligned}$$

Agora calculemos $|X_u \wedge X_v|$.

$$\begin{aligned}
|X_u \wedge X_v| &= \sqrt{(-bc \sinh^2 u \cos v)^2 + (-ac \sinh^2 u \sin v)^2 + (ab \cosh u \sinh u)^2} \\
&= \sqrt{(bc \sinh^2 u \cos v)^2 + (ac \sinh^2 u \sin v)^2 + (ab \cosh u \sinh u)^2} \\
&= \sqrt{\sinh^2 u [(bc \sinh u \cos v)^2 + (ac \sinh u \sin v)^2 + \sinh^2 u (ab \cosh u)^2]} \\
&= \sqrt{\sinh^2 u [(bc \sinh u \cos v)^2 + (ac \sinh u \sin v)^2 + (ab \cosh u)^2]}.
\end{aligned}$$

Como $|X_u \wedge X_v| = \sqrt{EG - F^2}$,

$$EG - F^2 = \sinh^2 u [(bc \sinh u \cos v)^2 + (ac \sinh u \sin v)^2 + (ab \cosh u)^2].$$

Fazendo $A = (bc \sinh u \cos v)^2 + (ac \sinh u \sen v)^2 + (ab \cosh u)^2 > 0$, obtemos

$$EG - F^2 = \sinh^2 u A.$$

Assim,

$$N(u, v) = \left(\frac{-bc \sinh^2 u \cos v}{\sqrt{\sinh^2 u A}}, \frac{-ac \sinh^2 u \sen v}{\sqrt{\sinh^2 u A}}, \frac{ab \cosh u \sinh u}{\sqrt{\sinh^2 u A}} \right).$$

(iv) *Coefficientes da Segunda Forma Fundamental*

$$\begin{aligned} e &= \langle N, X_{uu} \rangle \\ &= \left\langle \left(\frac{-bc \sinh^2 u \cos v}{\sqrt{\sinh^2 u A}}, \frac{-ac \sinh^2 u \sen v}{\sqrt{\sinh^2 u A}}, \frac{ab \cosh u \sinh u}{\sqrt{\sinh^2 u A}} \right), \right. \\ &\quad \left. (a \sinh u \cos v, b \sinh u \sen v, c \cosh u) \right\rangle \\ &= -\frac{abc \sinh^3 u \cos^2 v}{\sqrt{\sinh^2 u A}} - \frac{abc \sinh^3 u \sen^2 v}{\sqrt{\sinh^2 u A}} + \frac{abc \cosh^2 u \sinh u}{\sqrt{\sinh^2 u A}} \\ &= -\frac{abc \sinh^3 u}{\sqrt{\sinh^2 u A}} \cdot (\cos^2 v + \sen^2 v) + \frac{abc \cosh^2 u \sinh u}{\sqrt{\sinh^2 u A}} \\ &= \frac{abc \sinh u}{\sqrt{\sinh^2 u A}} \cdot (-\sinh^2 u + \cosh^2 u) \\ &= \frac{abc \sinh u}{\sqrt{\sinh^2 u A}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f &= \langle N, X_{uv} \rangle \\ &= \left\langle \left(\frac{-bc \sinh^2 u \cos v}{\sqrt{\sinh^2 u A}}, \frac{-ac \sinh^2 u \sen v}{\sqrt{\sinh^2 u A}}, \frac{ab \cosh u \sinh u}{\sqrt{\sinh^2 u A}} \right), \right. \\ &\quad \left. (-a \cosh u \sen v, b \cosh u \cos v, 0) \right\rangle \\ &= \frac{abc \sinh^2 u \cos v \cosh u \sen v}{\sqrt{\sinh^2 u A}} - \frac{abc \sinh^2 u \sen v \cosh u \cos v}{\sqrt{\sinh^2 u A}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g &= \langle N, X_{vv} \rangle \\ &= \left\langle \left(\frac{-bc \sinh^2 u \cos v}{\sqrt{\sinh^2 u A}}, \frac{-ac \sinh^2 u \sen v}{\sqrt{\sinh^2 u A}}, \frac{ab \cosh u \sinh u}{\sqrt{\sinh^2 u A}} \right), \right. \\ &\quad \left. (-a \sinh u \cos v, -b \sinh u \sen v, 0) \right\rangle \\ &= \frac{abc \sinh^3 u \cos^2 v}{\sqrt{\sinh^2 u A}} + \frac{abc \sinh^3 u \sen^2 v}{\sqrt{\sinh^2 u A}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{abc \operatorname{senh}^3 u (\cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v)}{\sqrt{\operatorname{senh}^2 u A}} \\
&= \frac{abc \operatorname{senh}^3 u}{\sqrt{\operatorname{senh}^2 u A}}.
\end{aligned}$$

(v) *Curvatura Gaussiana*

$$\begin{aligned}
K(u, v) &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\
&= \frac{\frac{abc \operatorname{senh} u}{\sqrt{\operatorname{senh}^2 u A}} \cdot \frac{abc \operatorname{senh}^3 u}{\sqrt{\operatorname{senh}^2 u A}} - (0)^2}{\operatorname{senh}^2 u A} \\
&= \frac{(abc)^2 \operatorname{senh}^4 u}{\operatorname{senh}^2 u A} \\
&= \frac{(abc)^2 \operatorname{senh}^4 u}{\operatorname{senh}^2 u A} \cdot \frac{1}{\operatorname{senh}^2 u A} \\
&= \frac{(abc)^2 \operatorname{senh}^4 u}{\operatorname{senh}^4 u A^2} \\
&= \frac{(abc)^2}{[(bc \operatorname{senh} u \cos v)^2 + (ac \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v)^2 + (ab \cosh u)^2]^2}.
\end{aligned}$$

2.12 HELICÓIDE

Exemplo 2.12.1. *Vamos calcular a curvatura Gaussiana do helicóide (Figura 18) coberto pela parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por (CARMO, 2012)*

$$X(u, v) = (v \cos u, v \operatorname{sen} u, au),$$

onde $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < 2\pi \text{ e } v \in \mathbb{R}\}$.

(i) *Derivadas Parciais*

$$X_u = (-v \operatorname{sen} u, v \cos u, a),$$

$$X_v = (\cos u, \operatorname{sen} u, 0),$$

$$X_{uu} = (-v \cos u, -v \operatorname{sen} u, 0),$$

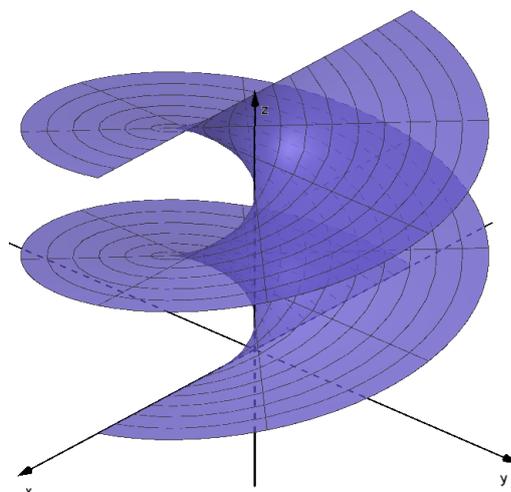
$$X_{uv} = (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0),$$

$$X_{vv} = (0, 0, 0).$$

(ii) *Coeficientes da Primeira Forma Fundamental*

$$\begin{aligned}
E &= \langle X_u, X_u \rangle = |X_u|^2 \\
&= |(-v \operatorname{sen} u, v \cos u, a)|^2
\end{aligned}$$

Figura 18 – Helicóide



Fonte: Autor.

$$\begin{aligned}
 &= (-v \operatorname{sen} u)^2 + (v \cos u)^2 + (a)^2 \\
 &= v^2 \operatorname{sen}^2 u + v^2 \cos^2 u + a^2 \\
 &= v^2 (\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u) + a^2 \\
 &= v^2 + a^2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F &= \langle X_u, X_v \rangle \\
 &= \langle (-v \operatorname{sen} u, v \cos u, a), (\cos u, \operatorname{sen} u, 0) \rangle \\
 &= -v \operatorname{sen} u \cos u + v \cos u \operatorname{sen} u \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G &= \langle X_v, X_v \rangle = |X_v|^2 \\
 &= |(\cos u, \operatorname{sen} u, 0)|^2 \\
 &= (\cos u)^2 + (\operatorname{sen} u)^2 \\
 &= \cos^2 u + \operatorname{sen}^2 u \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

(iii) *Aplicação Normal de Gauss*

$$N(u, v) = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}.$$

Calculemos primeiramente $X_u \wedge X_v$.

$$X_u \wedge X_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -v \operatorname{sen} u & v \cos u & a \\ \cos u & \operatorname{sen} u & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= (-a \operatorname{sen} u) \vec{i} - (-a \cos u) \vec{j} + (-v \operatorname{sen}^2 u - v \cos^2 u) \vec{k} \\
&= (-a \operatorname{sen} u) \vec{i} + (a \cos u) \vec{j} + (-v(\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u)) \vec{k} \\
&= (-a \operatorname{sen} u) \vec{i} + (a \cos u) \vec{j} + (-v) \vec{k} \\
&= (-a \operatorname{sen} u, a \cos u, -v).
\end{aligned}$$

Agora calculemos $|X_u \wedge X_v|$. Como

$$|X_u \wedge X_v| = \sqrt{EG - F^2}$$

e

$$\begin{aligned}
EG - F^2 &= (v^2 + a^2) \cdot 1 - 0^2 \\
&= v^2 + a^2 \\
&= E > 0,
\end{aligned}$$

então

$$|X_u \wedge X_v| = \sqrt{E}.$$

Assim,

$$N(u, v) = \left(\frac{-a \operatorname{sen} u}{\sqrt{E}}, \frac{a \cos u}{\sqrt{E}}, \frac{-v}{\sqrt{E}} \right).$$

(iv) *Coefficientes da Segunda Forma Fundamental*

$$\begin{aligned}
e &= \langle N, X_{uu} \rangle \\
&= \left\langle \left(\frac{-a \operatorname{sen} u}{\sqrt{E}}, \frac{a \cos u}{\sqrt{E}}, \frac{-v}{\sqrt{E}} \right), (-v \cos u, -v \operatorname{sen} u, 0) \right\rangle \\
&= \frac{av \operatorname{sen} u \cos u}{\sqrt{E}} - \frac{av \cos u \operatorname{sen} u}{\sqrt{E}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f &= \langle N, X_{uv} \rangle \\
&= \left\langle \left(\frac{-a \operatorname{sen} u}{\sqrt{E}}, \frac{a \cos u}{\sqrt{E}}, \frac{-v}{\sqrt{E}} \right), (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0) \right\rangle \\
&= \frac{a \operatorname{sen}^2 u}{\sqrt{E}} + \frac{a \cos^2 u}{\sqrt{E}} \\
&= \frac{a(\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u)}{\sqrt{E}} \\
&= \frac{a}{\sqrt{E}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g &= \langle N, X_{vv} \rangle \\
 &= \left\langle \left(\frac{-a \operatorname{sen} u}{\sqrt{E}}, \frac{a \cos u}{\sqrt{E}}, \frac{-v}{\sqrt{E}} \right), (0, 0, 0) \right\rangle \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

(v) *Curvatura Gaussiana*

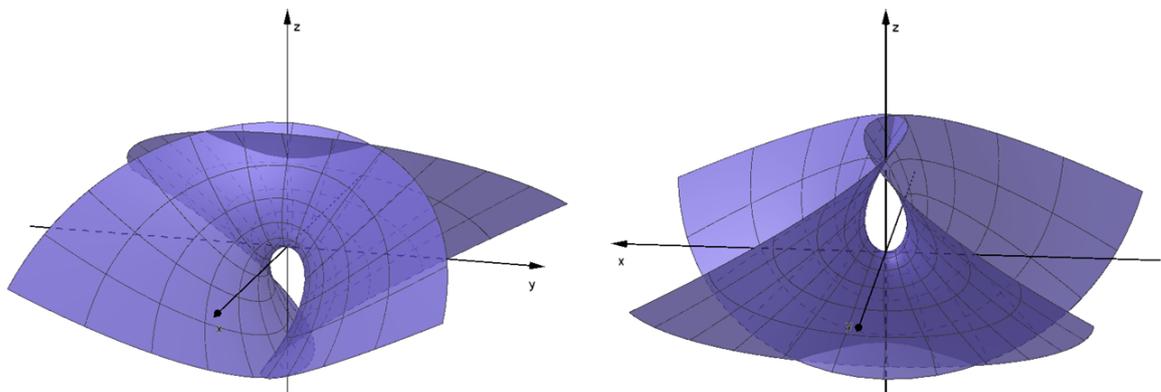
$$\begin{aligned}
 K(u, v) &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\
 &= \frac{0 \cdot 0 - \left(\frac{a}{\sqrt{E}} \right)^2}{E} \\
 &= -\frac{a^2}{E} \\
 &= -\frac{a^2}{E} \cdot \frac{1}{E} \\
 &= -\frac{a^2}{E^2} \\
 &= -\frac{a^2}{(v^2 + a^2)^2}.
 \end{aligned}$$

2.13 SUPERFÍCIE DE ENNEPER

Exemplo 2.13.1. *Vamos calcular a curvatura Gaussiana da superfície de Enneper (Figura 19) coberto pela parametrização $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por (CARMO, 2012)*

$$X(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2 \right).$$

Figura 19 – Superfície de Enneper



Fonte: Autor.

(i) Derivadas Parciais

$$\begin{aligned}
X_u &= (1 - u^2 + v^2, 2uv, 2u), \\
X_v &= (2uv, 1 - v^2 + u^2, -2v), \\
X_{uu} &= (-2u, 2v, 2), \\
X_{uv} &= (2v, 2u, 0), \\
X_{vv} &= (2u, -2v, -2).
\end{aligned}$$

(ii) Coeficientes da Primeira Forma Fundamental

$$\begin{aligned}
E &= \langle X_u, X_u \rangle = |X_u|^2 \\
&= |(1 - u^2 + v^2, 2uv, 2u)|^2 \\
&= (1 - u^2 + v^2)^2 + (2uv)^2 + (2u)^2 \\
&= (1 - u^2 + v^2)(1 - u^2 + v^2) + 4u^2v^2 + 4u^2 \\
&= 1 - u^2 + v^2 - u^2 + u^4 - u^2v^2 + v^2 - u^2v^2 + v^4 + 4u^2v^2 + 4u^2 \\
&= 1 - 2u^2 + 4u^2 + 2v^2 - 2u^2v^2 + 4u^2v^2 + u^4 + v^4 \\
&= 1 + 2u^2 + 2v^2 + 2u^2v^2 + u^4 + v^4 \\
&= 1 + (2u^2 + 2v^2) + (2u^2v^2 + u^4 + v^4) \\
&= 1 + (2u^2 + 2v^2) + ((u^2)^2 + 2u^2v^2 + (v^2)^2) \\
&= 1 + 2(u^2 + v^2) + (u^2 + v^2)^2 \\
&= (1 + (u^2 + v^2))^2 \\
&= (1 + u^2 + v^2)^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F &= \langle X_u, X_v \rangle \\
&= \langle (1 - u^2 + v^2, 2uv, 2u), (2uv, 1 - v^2 + u^2, -2v) \rangle \\
&= (1 - u^2 + v^2)2uv + 2uv(1 - v^2 + u^2) - 4uv \\
&= 2uv - 2u^3v + 2uv^3 + 2uv - 2uv^3 + 2u^3v - 4uv \\
&= 4uv - 4uv \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G &= \langle X_v, X_v \rangle = |X_v|^2 \\
&= |(2uv, 1 - v^2 + u^2, -2v)|^2 \\
&= (2uv)^2 + (1 - v^2 + u^2)^2 + (-2v)^2 \\
&= 4u^2v^2 + (1 - v^2 + u^2)(1 - v^2 + u^2) + 4v^2 \\
&= 4u^2v^2 + 1 - v^2 + u^2 - v^2 + v^4 - u^2v^2 + u^2 - u^2v^2 + u^4 + 4v^2 \\
&= 1 - 2v^2 + 4v^2 + 2u^2 + 4u^2v^2 - 2u^2v^2 + u^4 + v^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + 2v^2 + 2u^2 + 2u^2v^2 + u^4 + v^4 \\
&= (1 + u^2 + v^2)^2.
\end{aligned}$$

Pelo cálculo do coeficiente E temos que

$$1 + 2v^2 + 2u^2 + 2u^2v^2 + u^4 + v^4 = (1 + u^2 + v^2)^2.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
G &= (1 + u^2 + v^2)^2 \\
&= E.
\end{aligned}$$

(iii) Aplicação Normal de Gauss

$$N(u, v) = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}.$$

Calculemos primeiramente $X_u \wedge X_v$.

$$\begin{aligned}
X_u \wedge X_v &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 - u^2 + v^2 & 2uv & 2u \\ 2uv & 1 - v^2 + u^2 & -2v \end{vmatrix} \\
&= (-4uv^2 - 2u(1 - v^2 + u^2))\vec{i} - ((1 - u^2 + v^2)(-2v) - 4u^2v)\vec{j} \\
&\quad + ((1 - u^2 + v^2)(1 - v^2 + u^2) - 4u^2v^2)\vec{k} \\
&= (-4uv^2 - 2u + 2uv^2 - 2u^3)\vec{i} - (-2v + 2u^2v + -2v^3 - 4u^2v)\vec{j} \\
&\quad + (1 - v^2 + u^2 - u^2 + u^2v^2 - u^4 + v^2 - v^4 + u^2v^2 - 4u^2v^2)\vec{k} \\
&= (-2uv^2 - 2u - 2u^3)\vec{i} - (-2v - 2v^3 - 2u^2v)\vec{j} \\
&\quad + (1 + 2u^2v^2 - 4u^2v^2 - u^4 - v^4)\vec{k} \\
&= (-2uv^2 - 2u - 2u^3)\vec{i} + (2v + 2v^3 + 2u^2v)\vec{j} + (1 - 2u^2v^2 - u^4 - v^4)\vec{k} \\
&= (-2uv^2 - 2u - 2u^3, 2v + 2v^3 + 2u^2v, 1 - 2u^2v^2 - u^4 - v^4).
\end{aligned}$$

Agora calculemos $|X_u \wedge X_v|$. Como $|X_u \wedge X_v| = \sqrt{EG - F^2}$ e $E = G$, com $E > 0$, então

$$\begin{aligned}
|X_u \wedge X_v| &= \sqrt{E \cdot E - 0^2} \\
&= \sqrt{E^2} \\
&= E.
\end{aligned}$$

Assim,

$$N(u, v) = \left(\frac{-2uv^2 - 2u - 2u^3}{E}, \frac{2v + 2v^3 + 2u^2v}{E}, \frac{1 - 2u^2v^2 - u^4 - v^4}{E} \right).$$

(iv) Coeficientes da Segunda Forma Fundamental

$$\begin{aligned}
e &= \langle N, X_{uu} \rangle \\
&= \left\langle \left(\frac{-2uv^2 - 2u - 2u^3}{E}, \frac{2v + 2v^3 + 2u^2v}{E}, \frac{1 - 2u^2v^2 - u^4 - v^4}{E} \right), (-2u, 2v, 2) \right\rangle \\
&= \frac{(-2uv^2 - 2u - 2u^3)(-2u)}{E} + \frac{(2v + 2v^3 + 2u^2v)2v}{E} + \frac{(1 - 2u^2v^2 - u^4 - v^4)2}{E} \\
&= \frac{4u^2v^2 + 4u^2 + 4u^4}{E} + \frac{4v^2 + 4v^4 + 4u^2v^2}{E} + \frac{2 - 4u^2v^2 - 2u^4 - 2v^4}{E} \\
&= \frac{4u^2v^2 + 4u^2 + 4u^4 + 4v^2 + 4v^4 + 4u^2v^2 + 2 - 4u^2v^2 - 2u^4 - 2v^4}{E} \\
&= \frac{4u^2v^2 + 4u^2 + 2u^4 + 4v^2 + 2v^4 + 2}{E} \\
&= \frac{2(2u^2v^2 + 2u^2 + u^4 + 2v^2 + v^4 + 1)}{E}.
\end{aligned}$$

Pelo cálculo do coeficiente E temos que

$$2u^2v^2 + 2u^2 + u^4 + 2v^2 + v^4 + 1 = (1 + u^2 + v^2)^2 = E.$$

Assim,

$$e = \frac{2E}{E} = 2.$$

$$\begin{aligned}
f &= \langle N, X_{uv} \rangle \\
&= \left\langle \left(\frac{-2uv^2 - 2u - 2u^3}{E}, \frac{2v + 2v^3 + 2u^2v}{E}, \frac{1 - 2u^2v^2 - u^4 - v^4}{E} \right), (2v, 2u, 0) \right\rangle \\
&= \frac{(-2uv^2 - 2u - 2u^3)2v}{E} + \frac{(2v + 2v^3 + 2u^2v)2u}{E} \\
&= \frac{-4uv^3 - 4uv - 4u^3v}{E} + \frac{4uv + 4uv^3 + 4u^3v}{E} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g &= \langle N, X_{uu} \rangle \\
&= \left\langle \left(\frac{-2uv^2 - 2u - 2u^3}{E}, \frac{2v + 2v^3 + 2u^2v}{E}, \frac{1 - 2u^2v^2 - u^4 - v^4}{E} \right), (2u, -2v, -2) \right\rangle \\
&= \frac{(-2uv^2 - 2u - 2u^3)2u}{E} + \frac{(2v + 2v^3 + 2u^2v)(-2v)}{E} + \frac{(1 - 2u^2v^2 - u^4 - v^4)(-2)}{E} \\
&= \frac{-4u^2v^2 - 4u^2 - 4u^4}{E} + \frac{-4v^2 - 4v^4 - 4u^2v^2}{E} + \frac{-2 + 4u^2v^2 + 2u^4 + 2v^4}{E} \\
&= \frac{-4u^2v^2 - 4u^2 - 4u^4 - 4v^2 - 4v^4 - 4u^2v^2 - 2 + 4u^2v^2 + 2u^4 + 2v^4}{E} \\
&= \frac{-4u^2v^2 - 4u^2 - 2u^4 - 4v^2 - 2v^4 - 2}{E}
\end{aligned}$$

$$= \frac{-2(2u^2v^2 + 2u^2 + u^4 + 2v^2 + v^4 + 1)}{E}.$$

Pelo cálculo do coeficiente E temos que

$$2u^2v^2 + 2u^2 + u^4 + 2v^2 + v^4 + 1 = (1 + u^2 + v^2)^2 = E.$$

Assim,

$$g = \frac{-2E}{E} = -2.$$

(v) *Curvatura Gaussiana*

$$\begin{aligned} K(u, v) &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\ &= \frac{2 \cdot (-2) - 0^2}{E} \\ &= \frac{-4}{E} \\ &= -\frac{4}{(1 + u^2 + v^2)^2}. \end{aligned}$$

2.14 SUPERFÍCIE DE MONGE

Exemplo 2.14.1. *Vamos calcular a curvatura Gaussiana da superfície de Monge (Proposição 1.1.1) coberta pela parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por*

$$X(u, v) = (u, v, h(u, v)).$$

(i) *Derivadas Parciais*

$$X_u = (1, 0, h_u),$$

$$X_v = (0, 1, h_v),$$

$$X_{uu} = (0, 0, h_{uu}),$$

$$X_{uv} = (0, 0, h_{uv}),$$

$$X_{vv} = (0, 0, h_{vv}).$$

(ii) *Coeficientes da Primeira Forma Fundamental*

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle = |X_u|^2 \\ &= |(1, 0, h_u)|^2 \\ &= (1)^2 + (h_u)^2 \\ &= 1 + h_u^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F &= \langle X_u, X_v \rangle \\
 &= \langle (1, 0, h_u), (0, 1, h_v) \rangle \\
 &= h_u h_v.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G &= \langle X_u, X_u \rangle = |X_u|^2 \\
 &= |(0, 1, h_v)|^2 \\
 &= (1)^2 + (h_v)^2 \\
 &= 1 + h_v^2.
 \end{aligned}$$

(iii) *Aplicação Normal de Gauss*

$$N(u, v) = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}.$$

Calculamos primeiramente $X_u \wedge X_v$.

$$\begin{aligned}
 X_u \wedge X_v &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & h_u \\ 0 & 1 & h_v \end{vmatrix} \\
 &= (-h_u)\vec{i} - (-h_v)\vec{j} + (1)\vec{k} \\
 &= (-h_u)\vec{i} + (h_v)\vec{j} + (1)\vec{k} \\
 &= (-h_u, h_v, 1).
 \end{aligned}$$

Agora calculamos $|X_u \wedge X_v|$.

$$\begin{aligned}
 |X_u \wedge X_v| &= \sqrt{(-h_u)^2 + (h_v)^2 + (1)^2} \\
 &= \sqrt{h_u^2 + h_v^2 + 1}
 \end{aligned}$$

Como $|X_u \wedge X_v| = \sqrt{EG - F^2}$,

$$EG - F^2 = h_u^2 + h_v^2 + 1.$$

Fazendo $A = h_u^2 + h_v^2 + 1 > 0$, obtemos

$$|X_u \wedge X_v| = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{A}.$$

Assim,

$$N(u, v) = \left(\frac{-h_u}{\sqrt{A}}, \frac{h_v}{\sqrt{A}}, \frac{1}{\sqrt{A}} \right).$$

(iv) *Coefficientes da Segunda Forma Fundamental*

$$\begin{aligned}
 e &= \langle N, X_{uu} \rangle \\
 &= \left\langle \left(\frac{-h_u}{\sqrt{A}}, \frac{h_v}{\sqrt{A}}, \frac{1}{\sqrt{A}} \right), (0, 0, h_{uu}) \right\rangle \\
 &= \frac{h_{uu}}{\sqrt{A}}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f &= \langle N, X_{uv} \rangle \\
 &= \left\langle \left(\frac{-h_u}{\sqrt{A}}, \frac{h_v}{\sqrt{A}}, \frac{1}{\sqrt{A}} \right), (0, 0, h_{uv}) \right\rangle \\
 &= \frac{h_{uv}}{\sqrt{A}}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g &= \langle N, X_{vv} \rangle \\
 &= \left\langle \left(\frac{-h_u}{\sqrt{A}}, \frac{h_v}{\sqrt{A}}, \frac{1}{\sqrt{A}} \right), (0, 0, h_{vv}) \right\rangle \\
 &= \frac{h_{vv}}{\sqrt{A}}.
 \end{aligned}$$

(v) *Curvatura Gaussiana*

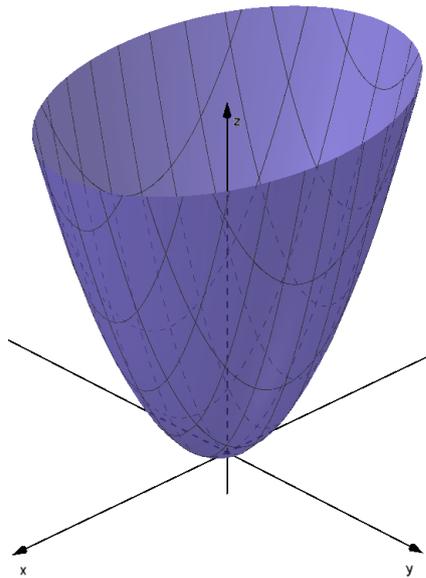
$$\begin{aligned}
 K(u, v) &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\
 &= \frac{\frac{h_{uu}}{\sqrt{A}} \cdot \frac{h_{vv}}{\sqrt{A}} - \left(\frac{h_{uv}}{\sqrt{A}} \right)^2}{A} \\
 &= \frac{\frac{h_{uu}h_{vv}}{A} - \frac{h_{uv}^2}{A}}{A} \\
 &= \frac{h_{uu}h_{vv} - h_{uv}^2}{A} \\
 &= \frac{h_{uu}h_{vv} - h_{uv}^2}{A} \cdot \frac{1}{A} \\
 &= \frac{h_{uu}h_{vv} - h_{uv}^2}{A^2} \\
 &= \frac{h_{uu}h_{vv} - h_{uv}^2}{(h_u^2 + h_v^2 + 1)^2}.
 \end{aligned}$$

2.15 PARABOLÓIDE ELÍPTICO

Exemplo 2.15.1. Vamos calcular a curvatura Gaussiana do parabolóide elíptico (Figura 20) coberto pela parametrização $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por (OLIVEIRA; RUFINO, 2004)

$$X(u, v) = \left(u, v, \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} \right).$$

Figura 20 – Parabolóide Elíptico



Fonte: Autor.

Note que a parametrização X do parabolóide elíptico o caracteriza como uma superfície de Monge. Assim, usaremos a expressão da curvatura Gaussiana do Exemplo 2.14.1 para calcular sua curvatura.

(i) Derivadas Parciais da $h(u, v) = \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}$

$$h_u = \frac{2u}{a^2},$$

$$h_v = \frac{2v}{b^2},$$

$$h_{uu} = \frac{2}{a^2},$$

$$h_{uv} = 0,$$

$$h_{vv} = \frac{2}{b^2}.$$

(ii) Curvatura Gaussiana

$$K(u, v) = \frac{h_{uu}h_{vv} - h_{uv}^2}{(h_u^2 + h_v^2 + 1)^2}$$

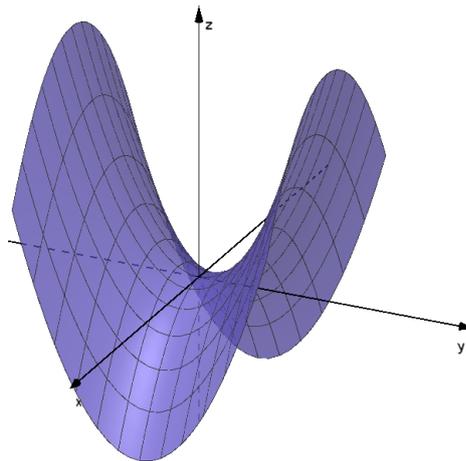
$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{2}{a^2} \cdot \frac{2}{b^2} - 0^2}{\left(\left(\frac{2u}{a^2} \right)^2 + \left(\frac{2v}{b^2} \right)^2 + 1 \right)^2} \\
&= \frac{4}{a^2 b^2} \frac{1}{\left(\frac{4u^2}{a^4} + \frac{4v^2}{b^4} + 1 \right)^2} \\
&= \frac{4}{a^2 b^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{4u^2}{a^4} + \frac{4v^2}{b^4} + 1 \right)^2} \\
&= \frac{4}{a^2 b^2 \left(\frac{4u^2}{a^4} + \frac{4v^2}{b^4} + 1 \right)^2}.
\end{aligned}$$

2.16 PARABOLÓIDE HIPERBÓLICO (SELA)

Exemplo 2.16.1. Vamos calcular a curvatura Gaussiana do parabolóide hiperbólico (Figura 21) coberto pela parametrização $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é definida por (OLIVEIRA; RUFINO, 2004)

$$X(u, v) = \left(u, v, \frac{v^2}{b^2} - \frac{u^2}{a^2} \right).$$

Figura 21 – Parabolóide Hiperbólico (Sela)



Fonte: Autor.

Note que a parametrização X do parabolóide hiperbólico o caracteriza como uma superfície de Monge. Assim, usaremos a expressão da curvatura Gaussiana do Exemplo 2.14.1 para calcular sua curvatura.

(i) *Derivadas Parciais da* $h(u, v) = \frac{v^2}{b^2} - \frac{u^2}{a^2}$

$$h_u = \frac{-2u}{a^2},$$

$$h_v = \frac{2v}{b^2},$$

$$h_{uu} = \frac{-2}{a^2},$$

$$h_{uv} = 0,$$

$$h_{vv} = \frac{2}{b^2}.$$

(ii) *Curvatura Gaussiana*

$$\begin{aligned} K(u, v) &= \frac{h_{uu}h_{vv} - h_{uv}^2}{(h_u^2 + h_v^2 + 1)^2} \\ &= \frac{\left(\frac{-2}{a^2}\right) \cdot \frac{2}{b^2} - 0^2}{\left(\left(\frac{-2u}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{2v}{b^2}\right)^2 + 1\right)^2} \\ &= \frac{-\frac{4}{a^2b^2}}{\left(\frac{4u^2}{a^4} + \frac{4v^2}{b^4} + 1\right)^2} \\ &= -\frac{4}{a^2b^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{4u^2}{a^4} + \frac{4v^2}{b^4} + 1\right)^2} \\ &= -\frac{4}{a^2b^2 \left(\frac{4u^2}{a^4} + \frac{4v^2}{b^4} + 1\right)^2}. \end{aligned}$$

2.17 SELA DE MACACO

Exemplo 2.17.1. *Vamos calcular a curvatura Gaussiana da sela de macaco (Figura 22) coberto pela parametrização $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por (CARMO, 2012)*

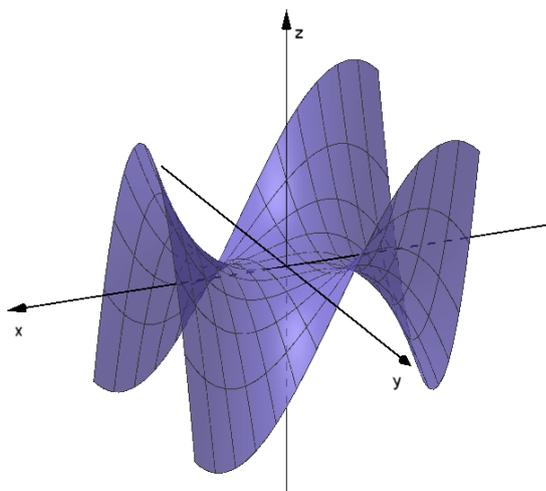
$$X(u, v) = (u, v, u^3 - 3uv^2).$$

Note que a parametrização X da sela de macaco o caracteriza como uma superfície de Monge. Assim, usaremos a expressão da curvatura Gaussiana do Exemplo 2.14.1 para calcular sua curvatura.

(i) *Derivadas Parciais da* $h(u, v) = u^3 - 3uv^2$

$$h_u = 3u^2 - 3v^2,$$

Figura 22 – Sela de Macaco



Fonte: Autor.

$$h_v = -6uv,$$

$$h_{uu} = 6u,$$

$$h_{uv} = -6v,$$

$$h_{vv} = -6u.$$

(ii) *Curvatura Gaussiana*

$$\begin{aligned} K(u, v) &= \frac{h_{uu}h_{vv} - h_{uv}^2}{(h_u^2 + h_v^2 + 1)^2} \\ &= \frac{6u \cdot (-6u) - (-6v)^2}{((3u^2 - 3v^2)^2 + (-6uv)^2 + 1)^2} \\ &= \frac{-36u^2 - 36v^2}{(9u^4 - 18u^2v^2 + 9v^4 + 36u^2v^2 + 1)^2} \\ &= -\frac{36u^2 + 36v^2}{(9u^4 + 18u^2v^2 + 9v^4 + 1)^2} \\ &= -\frac{36(u^2 + v^2)}{(9u^4 + 18u^2v^2 + 9v^4 + 1)^2}. \end{aligned}$$

2.18 SUPERFÍCIE DE REVOLUÇÃO

Exemplo 2.18.1. *Vamos calcular a curvatura Gaussiana da superfície de revolução do Exemplo 1.1.3 coberta pela parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por*

$$X(u, v) = (\varphi(v) \cos u, \varphi(v) \sin u, \psi(v)),$$

onde $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < 2\pi \text{ e } a < v < b\} \text{ e } \varphi(v) > 0$.

(i) *Derivadas Parciais*

$$X_u = (-\varphi \sin u, \varphi \cos u, 0),$$

$$\begin{aligned}X_v &= (\varphi' \cos u, \varphi' \sin u, \psi'), \\X_{uu} &= (-\varphi \cos u, -\varphi \sin u, 0), \\X_{uv} &= (-\varphi' \sin u, \varphi' \cos u, 0), \\X_{vv} &= (\varphi'' \cos u, \varphi'' \sin u, \psi''),\end{aligned}$$

onde φ e ψ estão em função de v e (\prime) denota derivação em relação a v .

(ii) *Coefficientes da Primeira Forma Fundamental*

$$\begin{aligned}E &= \langle X_u, X_u \rangle = |X_u|^2 \\&= |(-\varphi \sin u, \varphi \cos u, 0)|^2 \\&= (-\varphi \sin u)^2 + (\varphi \cos u)^2 \\&= \varphi^2 \sin^2 u + \varphi^2 \cos^2 u \\&= \varphi^2 (\sin^2 u + \cos^2 u) \\&= \varphi^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F &= \langle X_u, X_v \rangle \\&= \langle (-\varphi \sin u, \varphi \cos u, 0), (\varphi' \cos u, \varphi' \sin u, \psi') \rangle \\&= -\varphi \sin u \varphi' \cos u + \varphi \cos u \varphi' \sin u \\&= 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G &= \langle X_v, X_v \rangle = |X_v|^2 \\&= |(\varphi' \cos u, \varphi' \sin u, \psi')|^2 \\&= (\varphi' \cos u)^2 + (\varphi' \sin u)^2 + (\psi')^2 \\&= (\varphi')^2 \cos^2 u + (\varphi')^2 \sin^2 u + (\psi')^2 \\&= (\varphi')^2 (\cos^2 u + \sin^2 u) + (\psi')^2 \\&= (\varphi')^2 + (\psi')^2.\end{aligned}$$

(iii) *Aplicação Normal de Gauss*

$$N(u, v) = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}.$$

Calculamos primeiramente $X_u \wedge X_v$.

$$\begin{aligned}X_u \wedge X_v &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\varphi \sin u & \varphi \cos u & 0 \\ \varphi' \cos u & \varphi' \sin u & \psi' \end{vmatrix} \\&= (\varphi \psi' \cos u) \vec{i} - (-\varphi \psi' \sin u) \vec{j} + (-\varphi \varphi' \sin^2 u - \varphi \varphi' \cos^2 u) \vec{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\varphi\psi' \cos u)\vec{i} + (\varphi\psi' \sin u)\vec{j} + (-\varphi\psi'(\sin^2 u + \cos^2 u))\vec{k} \\
&= (\varphi\psi' \cos u)\vec{i} + (\varphi\psi' \sin u)\vec{j} + (-\varphi\psi')\vec{k} \\
&= (\varphi\psi' \cos u, \varphi\psi' \sin u, -\varphi\psi').
\end{aligned}$$

Agora calculemos $|X_u \wedge X_v|$. Como

$$|X_u \wedge X_v| = \sqrt{EG - F^2}$$

e

$$\begin{aligned}
EG - F^2 &= (\varphi)^2 \cdot ((\varphi')^2 + (\psi')^2) - 0^2 \\
&= (\varphi)^2 \cdot G.
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
|X_u \wedge X_v| &= \sqrt{(\varphi)^2 \cdot G} \\
&= \varphi\sqrt{G},
\end{aligned}$$

pois $\varphi > 0$.

Assim,

$$\begin{aligned}
N(u, v) &= \left(\frac{\varphi\psi' \cos u}{\varphi\sqrt{G}}, \frac{\varphi\psi' \sin u}{\varphi\sqrt{G}}, \frac{-\varphi\psi'}{\varphi\sqrt{G}} \right) \\
&= \left(\frac{\psi' \cos u}{\sqrt{G}}, \frac{\psi' \sin u}{\sqrt{G}}, \frac{-\psi'}{\sqrt{G}} \right).
\end{aligned}$$

(iv) *Coefficientes da Segunda Forma Fundamental*

$$\begin{aligned}
e &= \langle N, X_{uu} \rangle \\
&= \left\langle \left(\frac{\psi' \cos u}{\sqrt{G}}, \frac{\psi' \sin u}{\sqrt{G}}, \frac{-\psi'}{\sqrt{G}} \right), (-\varphi \cos u, -\varphi \sin u, 0) \right\rangle \\
&= \frac{-\varphi\psi' \cos^2 u}{\sqrt{G}} + \frac{-\varphi\psi' \sin^2 u}{\sqrt{G}} \\
&= \frac{-\varphi\psi'(\cos^2 u + \sin^2 u)}{\sqrt{G}} \\
&= -\frac{\varphi\psi'}{\sqrt{G}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f &= \langle N, X_{uv} \rangle \\
&= \left\langle \left(\frac{\psi' \cos u}{\sqrt{G}}, \frac{\psi' \sin u}{\sqrt{G}}, \frac{-\psi'}{\sqrt{G}} \right), (-\varphi' \sin u, \varphi' \cos u, 0) \right\rangle \\
&= -\frac{\psi' \cos u \varphi' \sin u}{\sqrt{G}} + \frac{\psi' \sin u \varphi' \cos u}{\sqrt{G}}
\end{aligned}$$

$$=0.$$

$$\begin{aligned} g &= \langle N, X_{vv} \rangle \\ &= \left\langle \left(\frac{\psi' \cos u}{\sqrt{G}}, \frac{\psi' \sin u}{\sqrt{G}}, \frac{-\varphi'}{\sqrt{G}} \right), (\varphi'' \cos u, \varphi'' \sin u, \psi'') \right\rangle \\ &= \frac{\varphi'' \psi' \cos^2 u}{\sqrt{G}} + \frac{\varphi'' \psi' \sin^2 u}{\sqrt{G}} - \frac{\varphi' \psi''}{\sqrt{G}} \\ &= \frac{\varphi'' \psi' (\cos^2 u + \sin^2 u)}{\sqrt{G}} - \frac{\varphi' \psi''}{\sqrt{G}} \\ &= \frac{\varphi'' \psi' - \varphi' \psi''}{\sqrt{G}}. \end{aligned}$$

(v) *Curvatura Gaussiana*

$$\begin{aligned} K(u, v) &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\ &= \frac{-\frac{\varphi \psi'}{\sqrt{G}} \cdot \frac{(\varphi'' \psi' - \varphi' \psi'')}{\sqrt{G}} - (0)^2}{(\varphi)^2 \cdot G} \\ &= \frac{-\varphi \psi' (\varphi'' \psi' - \varphi' \psi'')}{(\varphi)^2 \cdot G} \\ &= \frac{G}{(\varphi)^2 \cdot G} \\ &= \frac{-\varphi \psi' (\varphi'' \psi' - \varphi' \psi'')}{G} \cdot \frac{1}{(\varphi)^2 \cdot G} \\ &= \frac{-\varphi \psi' (\varphi'' \psi' - \varphi' \psi'')}{(\varphi)^2 \cdot G^2} \\ &= \frac{-\psi' (\varphi'' \psi' - \varphi' \psi'')}{\varphi \cdot G^2} \\ &= \frac{-\varphi'' (\psi')^2 + \varphi' \psi' \psi''}{\varphi ((\varphi')^2 + (\psi')^2)^2}. \end{aligned}$$

2.19 TORO

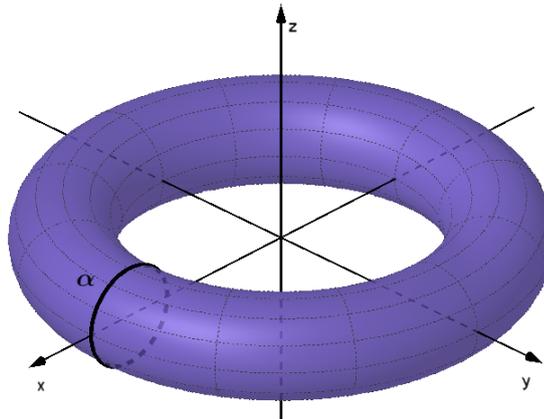
Exemplo 2.19.1. *Vamos calcular a curvatura Gaussiana da superfície obtida pela rotação da circunferência $c(v) = (a + r \cos v, 0, r \sin v)$, $0 < v < 2\pi$ em torno do eixo Oz contida no plano xz . Esta superfície de revolução, chamada toro (Figura 23), é coberta pela parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por (CARMO, 2012)*

$$X(u, v) = ((a + r \cos v) \cos u, (a + r \cos v) \sin u, r \sin v),$$

onde $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < 2\pi \text{ e } 0 < v < 2\pi\}$.

Como o toro é uma superfície de revolução, usaremos a expressão da curvatura Gaussiana do Exemplo 2.18.1 para calcular sua curvatura.

Figura 23 – Toro



Fonte: Autor.

(i) Identificar a φ e ψ

$$\varphi(v) = a + r \cos v,$$

$$\psi(v) = r \sin v.$$

(ii) Derivadas de 1ª e 2ª Ordem das Funções φ e ψ

$$\varphi'(v) = -r \sin v,$$

$$\varphi''(v) = -r \cos v.$$

$$\psi'(v) = r \cos v,$$

$$\psi''(v) = -r \sin v.$$

(iii) Curvatura Gaussiana

$$\begin{aligned} K(u, v) &= \frac{-\varphi''(\psi')^2 + \varphi'\psi'\psi''}{\varphi((\varphi')^2 + (\psi')^2)^2} \\ &= \frac{-(-r \cos v)(r \cos v)^2 + (-r \sin v)r \cos v(-r \sin v)}{(a + r \cos v)((-r \sin v)^2 + (r \cos v)^2)^2} \\ &= \frac{r^3 \cos^3 v + r^3 \cos v \sin^2 v}{(a + r \cos v)(r^2 \sin^2 v + r^2 \cos^2 v)^2} \\ &= \frac{r^3 \cos v(\cos^2 v + \sin^2 v)}{(a + r \cos v)(r^2(\sin^2 v + \cos^2 v))^2} \\ &= \frac{r^3 \cos v}{(a + r \cos v)r^4} \\ &= \frac{\cos v}{r(a + r \cos v)}. \end{aligned}$$

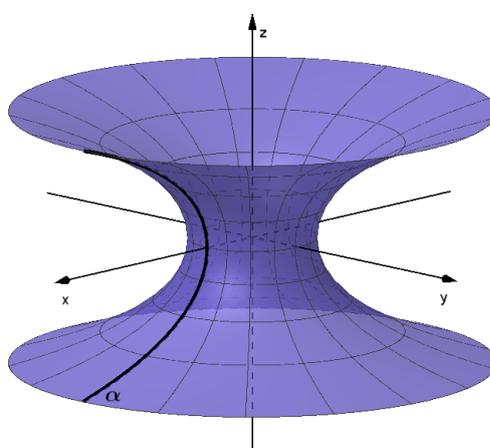
2.20 CATENÓIDE

Exemplo 2.20.1. Vamos calcular a curvatura Gaussiana da superfície obtida pela rotação da curva catenária $\alpha(v) = (a \cosh v, 0, av)$, $v \in \mathbb{R}$ em torno do eixo Oz contida no plano xz . Esta superfície de revolução, chamada catenóide (Figura 24), é coberta pela parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por (CARMO, 2012)

$$X(u, v) = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, av),$$

onde $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < 2\pi \text{ e } v \in \mathbb{R}\}$.

Figura 24 – Catenóide



Fonte: Autor.

Como o catenóide é uma superfície de revolução, usaremos a expressão da curvatura Gaussiana do Exemplo 2.18.1 para calcular sua curvatura.

(i) Identificar a φ e ψ

$$\varphi(v) = a \cosh v,$$

$$\psi(v) = av.$$

(ii) Derivadas de 1ª e 2ª Ordem das Funções φ e ψ

$$\varphi'(v) = a \sinh v,$$

$$\varphi''(v) = a \cosh v.$$

$$\psi'(v) = a,$$

$$\psi''(v) = 0.$$

(iii) Curvatura Gaussiana

$$K(u, v) = \frac{-\varphi''(\psi')^2 + \varphi' \psi' \psi''}{\varphi ((\varphi')^2 + (\psi')^2)^2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{-(a \cosh v)(a)^2 + (a \sinh v)(a) \cdot 0}{a \cosh v ((a \sinh v)^2 + (a)^2)^2} \\
 &= \frac{-a^3 \cosh v}{a \cosh v (a^2 \sinh^2 v + a^2)^2} \\
 &= \frac{-a^2}{(a^2(\sinh^2 v + 1))^2} \\
 &= \frac{-a^2}{(a^2 \cosh^2 v)^2} \\
 &= \frac{-a^2}{a^4 \cosh^4 v} \\
 &= -\frac{1}{a^2 \cosh^4 v}.
 \end{aligned}$$

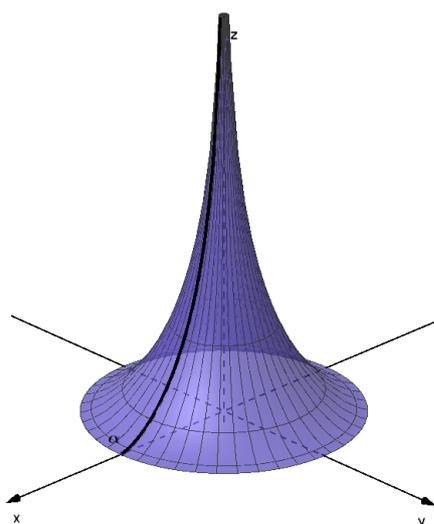
2.21 PSEUDO-ESFERA

Exemplo 2.21.1. Vamos calcular a curvatura Gaussiana da superfície obtida pela rotação da curva tractriz $\alpha(v) = (a \sin v, 0, a \cos v + a \ln \tan \frac{v}{2})$, $0 < v < \pi$ em torno do eixo Oz contida no plano xz . Esta superfície de revolução, chamada pseudo-esfera (Figura 25), é coberta pela parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por (CARMO, 2012)

$$X(u, v) = \left(a \sin v \cos u, a \sin v \sin u, a \cos v + a \ln \tan \frac{v}{2} \right),$$

onde $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < 2\pi \text{ e } 0 < v < \pi\}$.

Figura 25 – Pseudo-esfera



Fonte: Autor.

Como a pseudo-esfera é uma superfície de revolução, usaremos a expressão da curvatura Gaussiana do Exemplo 2.18.1 para calcular sua curvatura.

(i) Identificar a φ e ψ

$$\begin{aligned}\varphi(v) &= a \operatorname{sen} v, \\ \psi(v) &= a \cos v + a \ln \tan \frac{v}{2}.\end{aligned}$$

(ii) Derivadas de 1ª e 2ª Ordem das Funções φ e ψ

$$\begin{aligned}\varphi'(v) &= a \cos v, \\ \varphi''(v) &= -a \operatorname{sen} v.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi'(v) &= -a \operatorname{sen} v + a \operatorname{cosec} v, \\ \psi''(v) &= -a \cos v - a \operatorname{cosec} v \cotg v.\end{aligned}$$

(iii) Curvatura Gaussiana

$$\begin{aligned}K(u, v) &= \frac{-\varphi''(\psi')^2 + \varphi'\psi'\psi''}{\varphi((\varphi')^2 + (\psi')^2)^2} \\ &= \frac{-(-a \operatorname{sen} v)(-a \operatorname{sen} v + a \operatorname{cosec} v)^2}{a \operatorname{sen} v ((a \cos v)^2 + (-a \operatorname{sen} v + a \operatorname{cosec} v)^2)^2} \\ &\quad + \frac{(a \cos v)(-a \operatorname{sen} v + a \operatorname{cosec} v)(-a \cos v - a \operatorname{cosec} v \cotg v)}{a \operatorname{sen} v ((a \cos v)^2 + (-a \operatorname{sen} v + a \operatorname{cosec} v)^2)^2} \\ &= \frac{a \operatorname{sen} v (a^2 \operatorname{sen}^2 v - 2a^2 \operatorname{sen} v \operatorname{cosec} v + a^2 \operatorname{cosec}^2 v)}{a \operatorname{sen} v (a^2 \cos^2 v + a^2 \operatorname{sen}^2 v - 2a^2 \operatorname{sen} v \operatorname{cosec} v + a^2 \operatorname{cosec}^2 v)^2} \\ &\quad + \frac{(-a^2 \cos v \operatorname{sen} v + a^2 \cos v \operatorname{cosec} v)(-a \cos v - a \operatorname{cosec} v \cotg v)}{a \operatorname{sen} v (a^2 \cos^2 v + a^2 \operatorname{sen}^2 v - 2a^2 \operatorname{sen} v \operatorname{cosec} v + a^2 \operatorname{cosec}^2 v)^2} \\ &= \frac{a^3 \operatorname{sen}^3 v - 2a^3 \operatorname{sen} v + a^3 \operatorname{sen} v \operatorname{cosec}^2 v}{a \operatorname{sen} v (a^2(\cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v) - 2a^2 + a^2 \operatorname{cosec}^2 v)^2} \\ &\quad + \frac{a^3 \cos^2 v \operatorname{sen} v + a^3 \cos v \operatorname{sen} v \operatorname{cosec} v \cotg v}{a \operatorname{sen} v (a^2(\cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v) - 2a^2 + a^2 \operatorname{cosec}^2 v)^2} \\ &\quad + \frac{-a^3 \cos^2 v \operatorname{cosec} v - a^3 \cos v \operatorname{cosec}^2 v \cotg v}{a \operatorname{sen} v (a^2(\cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v) - 2a^2 + a^2 \operatorname{cosec}^2 v)^2} \\ &= \frac{a^3 \operatorname{sen}^3 v - 2a^3 \operatorname{sen} v + a^3 \operatorname{cosec} v + a^3 \cos^2 v \operatorname{sen} v + a^3 \cos v \cotg v}{a \operatorname{sen} v (a^2 - 2a^2 + a^2 \operatorname{cosec}^2 v)^2} \\ &\quad + \frac{-a^3 \cos^2 v \operatorname{cosec} v - a^3 \cos v \operatorname{cosec}^2 v \cotg v}{a \operatorname{sen} v (a^2 - 2a^2 + a^2 \operatorname{cosec}^2 v)^2} \\ &= \frac{a^3 \operatorname{sen}^3 v + a^3 \cos^2 v \operatorname{sen} v - 2a^3 \operatorname{sen} v + a^3 \operatorname{cosec} v - a^3 \cos^2 v \operatorname{cosec} v}{a \operatorname{sen} v (-a^2 + a^2 \operatorname{cosec}^2 v)^2} \\ &\quad + \frac{a^3 \cos v \cotg v - a^3 \cos v \operatorname{cosec}^2 v \cotg v}{a \operatorname{sen} v (-a^2 + a^2 \operatorname{cosec}^2 v)^2} \\ &= \frac{a^3 \operatorname{sen} v (\operatorname{sen}^2 v + \cos^2 v) - 2a^3 \operatorname{sen} v + a^3 \operatorname{cosec} v (1 - \cos^2 v)}{a \operatorname{sen} v (a^2(-1 + \operatorname{cosec}^2 v))^2} \\ &\quad + \frac{-a^3 \cos v \cotg v (-1 + \operatorname{cosec}^2 v)}{a \operatorname{sen} v (a^2(-1 + \operatorname{cosec}^2 v))^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a^3 \operatorname{sen} v - 2a^3 \operatorname{sen} v + a^3 \operatorname{cosec} v \operatorname{sen}^2 v - a^3 \cos v \cotg v \cotg^2 v}{a \operatorname{sen} v (a^2 \cotg^2 v)^2} \\
&= \frac{-a^3 \operatorname{sen} v + a^3 \operatorname{sen} v - a^3 \cos v \cotg^3 v}{a \operatorname{sen} v a^4 \cotg^4 v} \\
&= \frac{-a^3 \cos v \cotg^3 v}{a^5 \operatorname{sen} v \cotg^4 v} \\
&= -\frac{1}{a^2} \cdot \frac{\cos v}{\operatorname{sen} v} \cdot \frac{1}{\cotg v} \\
&= -\frac{1}{a^2} \cdot \cotg v \cdot \frac{1}{\cotg v} \\
&= -\frac{1}{a^2}.
\end{aligned}$$

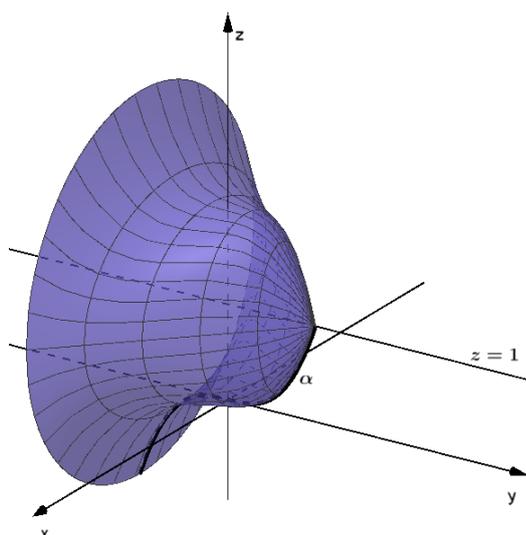
2.22 CHAPÉU DE SCHERLOCK

Exemplo 2.22.1. Vamos calcular a curvatura Gaussiana dos pontos da superfície obtida pela rotação da curva $\alpha(u) = (0, u, u^3)$, $-1 < u < 1$ em torno da reta $z = 1$ contida no plano yz . Esta superfície, chamada chapéu de Scherlock (Figura 26), é coberta pela parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por (TENENBLAT, 2008)

$$X(u, v) = ((1 - u^3) \cos v, u, (1 - u^3) \operatorname{sen} v + 1),$$

onde $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; -1 < u < 1 \text{ e } 0 < v < 2\pi\}$.

Figura 26 – Chapéu de Scherlock



Fonte: Autor.

(i) Derivadas Parciais

$$X_u = (-3u^2 \cos v, 1, -3u^2 \operatorname{sen} v),$$

$$X_v = (-(1 - u^3) \operatorname{sen} v, 0, (1 - u^3) \cos v),$$

$$\begin{aligned}X_{uu} &= (-6u \cos v, 0, -6u \operatorname{sen} v), \\X_{uv} &= (3u^2 \operatorname{sen} v, 0, -3u^2 \cos v), \\X_{vv} &= (-(1 - u^3) \cos v, 0, -(1 - u^3) \operatorname{sen} v),\end{aligned}$$

(ii) Coeficientes da Primeira Forma Fundamental

$$\begin{aligned}E &= \langle X_u, X_u \rangle = |X_u|^2 \\&= |(-3u^2 \cos v, 1, -3u^2 \operatorname{sen} v)|^2 \\&= (-3u^2 \cos v)^2 + (1)^2 + (-3u^2 \operatorname{sen} v)^2 \\&= 9u^4 \cos^2 v + 1 + 9u^4 \operatorname{sen}^2 v \\&= 9u^4 (\cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v) + 1 \\&= 9u^4 + 1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F &= \langle X_u, X_v \rangle \\&= (-3u^2 \cos v, 1, -3u^2 \operatorname{sen} v) \cdot (-(1 - u^3) \operatorname{sen} v, 0, (1 - u^3) \cos v) \\&= 3u^2 \cos v (1 - u^3) \operatorname{sen} v - 3u^2 \operatorname{sen} v (1 - u^3) \cos v \\&= 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G &= \langle X_v, X_v \rangle = |X_v|^2 \\&= |(-(1 - u^3) \operatorname{sen} v, 0, (1 - u^3) \cos v)|^2 \\&= ((-(1 - u^3) \operatorname{sen} v)^2 + ((1 - u^3) \cos v)^2) \\&= (1 - u^3)^2 \operatorname{sen}^2 v + (1 - u^3)^2 \cos^2 v \\&= (1 - u^3)^2 (\operatorname{sen}^2 v + \cos^2 v) \\&= (1 - u^3)^2.\end{aligned}$$

(iii) Aplicação Normal de Gauss

$$N(u, v) = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}.$$

Calculamos primeiramente $X_u \wedge X_v$.

$$\begin{aligned}X_u \wedge X_v &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3u^2 \cos v & 1 & -3u^2 \operatorname{sen} v \\ -(1 - u^3) \operatorname{sen} v & 0 & (1 - u^3) \cos v \end{vmatrix} \\&= ((1 - u^3) \cos v) \vec{i} - (-3u^2 \cos^2 v (1 - u^3) - 3u^2 \operatorname{sen}^2 v (1 - u^3)) \vec{j} \\&= + (-(1 - u^3) \operatorname{sen} v) \vec{k} \\&= ((1 - u^3) \cos v) \vec{i} - (-3u^2 (1 - u^3) (\cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v)) \vec{j} + ((1 - u^3) \operatorname{sen} v) \vec{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= ((1 - u^3) \cos v) \vec{i} + (3u^2(1 - u^3)) \vec{j} + ((1 - u^3) \sin v) \vec{k} \\
&= ((1 - u^3) \cos v, 3u^2(1 - u^3), (1 - u^3) \sin v).
\end{aligned}$$

Agora calculemos $|X_u \wedge X_v|$. Como

$$|X_u \wedge X_v| = \sqrt{EG - F^2}$$

e

$$\begin{aligned}
EG - F^2 &= (9u^4 + 1) \cdot (1 - u^3)^2 + 0^2 \\
&= (9u^4 + 1) \cdot (1 - u^3)^2 \\
&= EG.
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
|X_u \wedge X_v| &= \sqrt{(9u^4 + 1) \cdot (1 - u^3)^2} \\
&= (1 - u^3) \sqrt{E},
\end{aligned}$$

pois $-1 < u < 1$ o que implica $1 - u^3 > 0$.

Assim,

$$\begin{aligned}
N(u, v) &= \left(\frac{(1 - u^3) \cos v}{(1 - u^3) \sqrt{E}}, \frac{3u^2(1 - u^3)}{(1 - u^3) \sqrt{E}}, \frac{(1 - u^3) \sin v}{(1 - u^3) \sqrt{E}} \right) \\
&= \left(\frac{\cos v}{\sqrt{E}}, \frac{3u^2}{\sqrt{E}}, \frac{\sin v}{\sqrt{E}} \right).
\end{aligned}$$

(iv) *Coefficientes da Segunda Forma Fundamental*

$$\begin{aligned}
e &= \langle N, X_{uu} \rangle \\
&= \left\langle \left(\frac{\cos v}{\sqrt{E}}, \frac{3u^2}{\sqrt{E}}, \frac{\sin v}{\sqrt{E}} \right), (-6u \cos v, 0, -6u \sin v) \right\rangle \\
&= -\frac{6u \cos^2 v}{\sqrt{E}} - \frac{6u \sin^2 v}{\sqrt{E}} \\
&= -\frac{6u(\cos^2 v + \sin^2 v)}{\sqrt{E}} \\
&= -\frac{6u}{\sqrt{E}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f &= \langle N, X_{uv} \rangle \\
&= \left\langle \left(\frac{\cos v}{\sqrt{E}}, \frac{3u^2}{\sqrt{E}}, \frac{\sin v}{\sqrt{E}} \right), (3u^2 \sin v, 0, -3u^2 \cos v) \right\rangle \\
&= \frac{3u^2 \cos v \sin v}{\sqrt{E}} - \frac{3u^2 \sin v \cos v}{\sqrt{E}}
\end{aligned}$$

$$=0.$$

$$\begin{aligned} g &= \langle N, X_{vv} \rangle \\ &= \left\langle \left(\frac{\cos v}{\sqrt{E}}, \frac{3u^2}{\sqrt{E}}, \frac{\sin v}{\sqrt{E}} \right), (- (1 - u^3) \cos v, 0, - (1 - u^3) \sin v) \right\rangle \\ &= - \frac{(1 - u^3) \cos^2 v}{\sqrt{E}} - \frac{(1 - u^3) \sin^2 v}{\sqrt{E}} \\ &= - \frac{(1 - u^3)}{\sqrt{E}} (\cos^2 v + \sin^2 v) \\ &= - \frac{(1 - u^3)}{\sqrt{E}}. \end{aligned}$$

(v) *Curvatura Gaussiana*

$$\begin{aligned} K(u, v) &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\ &= \frac{\left(-\frac{6u}{\sqrt{E}} \right) \left(-\frac{(1 - u^3)}{\sqrt{E}} \right) - 0^2}{EG} \\ &= \frac{6u(1 - u^3)}{EG} \\ &= \frac{E}{EG} \\ &= \frac{6u(1 - u^3)}{E} \cdot \frac{1}{EG} \\ &= \frac{6u(1 - u^3)}{E^2 G} \\ &= \frac{6u(1 - u^3)}{(9u^4 + 1)^2 (1 - u^3)^2} \\ &= \frac{6u}{(9u^4 + 1)^2 (1 - u^3)}. \end{aligned}$$

2.23 TABELA DAS SUPERFÍCIES REGULARES CLÁSSICAS E SUAS CURVATURAS GAUSSIANAS

Tabela 1 – Curvaturas Gaussianas

Superfície	Curvatura Gaussiana
Plano	$K = 0$
Cilindro Elíptico	$K = 0$
Cilindro Circular	$K = 0$
Cilindro Parabólico	$K = 0$
Cil. Hiper. de Duas Folhas	$K = 0$
Cone Elíptico	$K = 0$
Cone Circular	$K = 0$
Elipsóide	$K = \frac{(abc)^2}{[(bc \operatorname{sen} v \cos u)^2 + (ac \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u)^2 + (ab \cos v)^2]^2}$
Esfera	$K = \frac{1}{r^2}$
Hiperbolóide Elíptico de Uma Folha	$K = -\frac{(abc)^2}{[(bc \operatorname{cosh} u \cos v)^2 + (ac \operatorname{cosh} u \operatorname{sen} v)^2 + (ab \operatorname{sen} hu)^2]^2}$
Hiperbolóide Elíptico de Duas Folha	$K = \frac{(abc)^2}{[(bc \operatorname{senh} u \cos v)^2 + (ac \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v)^2 + (ab \operatorname{cosh} u)^2]^2}$
Helicóide	$K = -\frac{a^2}{(v^2 + a^2)^2}$
Superfície de Enneper	$K = -\frac{4}{(1 + u^2 + v^2)^2}$
Superfície de Monge	$K = \frac{h_{uu}h_{vv} - h_{uv}^2}{(h_u^2 + h_v^2 + 1)^2}$
Parabolóide Elíptico	$K = \frac{4}{a^2b^2 \left(\frac{4u^2}{a^4} + \frac{4v^2}{b^4} + 1 \right)^2}$
Parabolóide Hiperbólico (Sela)	$K = -\frac{4}{a^2b^2 \left(\frac{4u^2}{a^4} + \frac{4v^2}{b^4} + 1 \right)^2}$
Sela de Macaco	$K = -\frac{36(u^2 + v^2)}{(9u^4 + 18u^2v^2 + 9v^4 + 1)^2}$
Superfície de Revolução	$K = \frac{-\varphi''(\psi')^2 + \varphi'\psi'\psi''}{\varphi((\varphi')^2 + (\psi')^2)^2}$

Continua...

Superfície	Curvatura Gaussiana
Toro	$K = \frac{\cos v}{r(a + r \cos v)}$
Catenóide	$K = -\frac{1}{a^2 \cosh^4 v}$
Pseudo-esfera	$K = -\frac{1}{a^2}$
Chapéu de Scherlock	$K = \frac{6u}{(9u^4 + 1)^2(1 - u^3)}$

Fonte: Autor

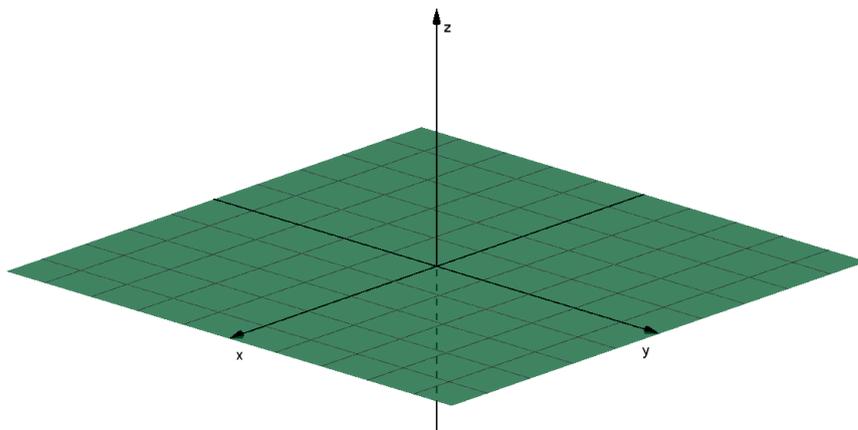
3 SUPERFÍCIES REGULARES CLÁSSICAS: ESTUDO DA CURVATURA GAUSSIANA

No Capítulo 2 foram obtidas expressões gerais para a curvatura Gaussiana de algumas superfícies regulares clássicas. Neste capítulo, por meio dessas expressões, faremos um estudo do comportamento da curvatura Gaussiana destas superfícies com o objetivo de obter informações mais detalhadas a respeito da curvatura Gaussiana em alguns pontos ou regiões destas superfícies. Serão analisados os pontos onde a curvatura Gaussiana se anula, os pontos onde ela é positiva ou negativa e os pontos de máximo e mínimo da curvatura Gaussiana. Estas análises serão feitas algebricamente utilizando-se as ferramentas do cálculo (ver Anexo A) e graficamente através do software GeoGebra.

3.1 SUPERFÍCIES REGULARES CLÁSSICAS COM CURVATURA GAUSSIANA NULA

Exemplo 3.1.1. *Pelos Exemplos 2.1.1, 2.2.1, 2.3.1, 2.4.1, 2.5.1, 2.6.1 e 2.7.1 verificamos, respectivamente, que o plano, o cilindro elíptico, cilindro circular, cilindro parabólico, cilindro hiperbólico de duas folhas, o cone elíptico e o cone circular possuem curvatura Gaussiana nula em todos os seus pontos. Logo, a representação gráfica da curvatura Gaussiana destas superfícies é um plano paralelo ao plano xy e que passa por $z = 0$ (Figura 27).*

Figura 27 – Gráfico da Curvatura Gaussiana Nula



Fonte: Autor.

3.2 SUPERFÍCIES REGULARES CLÁSSICAS COM CURVATURA GAUSSIANA CONSTANTE NÃO NULA

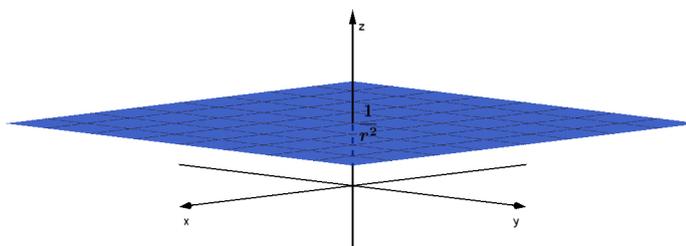
3.2.1 Esfera

Exemplo 3.2.1. No exemplo 2.9.1 verificamos que a curvatura Gaussiana da esfera de raio r é dada por

$$K(u, v) = \frac{1}{r^2},$$

isto é, a curvatura Gaussiana é constante e positiva em todos os pontos da esfera. Assim, a representação gráfica da curvatura Gaussiana da esfera é um plano paralelo ao plano xy e que corta o eixo Oz em $z = \frac{1}{r^2}$ (Figura 28), onde r é o raio da esfera.

Figura 28 – Gráfico da Curvatura Gaussiana da Esfera



Fonte: Autor.

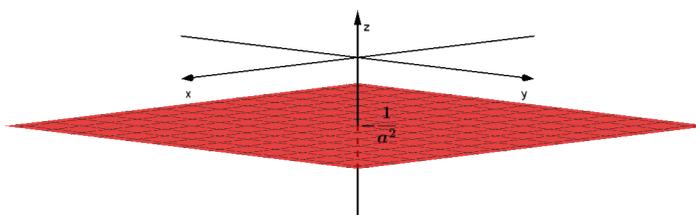
3.2.2 Pseudo-esfera

Exemplo 3.2.2. No exemplo 2.21.1 verificamos que a curvatura Gaussiana da pseudo-esfera é dada por

$$K(u, v) = -\frac{1}{a^2},$$

isto é, a curvatura Gaussiana é constante e negativa em todos os pontos da pseudo-esfera. Assim, a representação gráfica da curvatura Gaussiana da pseudo-esfera é um plano paralelo ao plano xy e que corta o eixo Oz em $z = -\frac{1}{a^2}$ (Figura 29).

Figura 29 – Gráfico da Curvatura Gaussiana da Pseudo-esfera



Fonte: Autor.

Observação 3.2.1. Note que as curvaturas Gaussiana da esfera e da pseudo-esfera se aproximam de zero na medida que r e a , respectivamente, crescem infinitamente.

3.3 SUPERFÍCIES REGULARES CLÁSSICAS COM CURVATURA GAUSSIANA VARIÁVEL

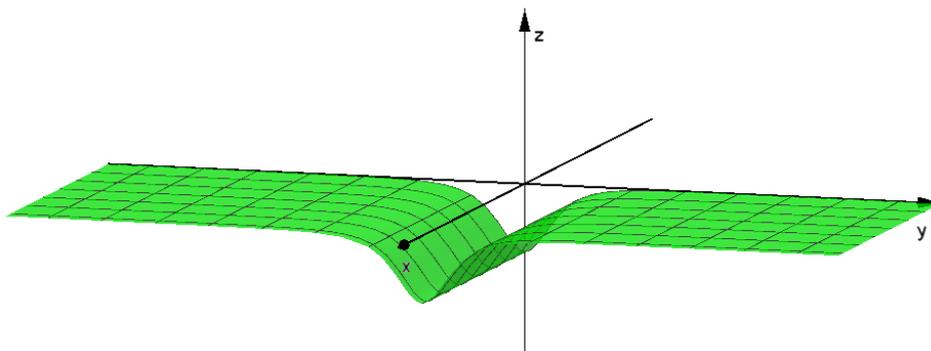
3.3.1 Helicóide

Exemplo 3.3.1. Do Exemplo 2.12.1 temos que a função curvatura Gaussiana K do helicóide é a função $K : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$K(u, v) = -\frac{a^2}{(v^2 + a^2)^2},$$

onde $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < 2\pi \text{ e } v \in \mathbb{R}\}$ e cujo gráfico de K é representado na Figura 30.

Figura 30 – Gráfico da Curvatura Gaussiana do Helicóide



Fonte: Autor.

Primeiramente, como $(v)^2 = (-v)^2$, temos que a curvatura Gaussiana nos pontos (u, v) e $(u, -v)$ são iguais, isto é,

$$K(u, v) = -\frac{a^2}{(v^2 + a^2)^2} = -\frac{a^2}{((-v)^2 + a^2)^2} = K(u, -v).$$

Logo, a curvatura Gaussiana dos pontos do helicóide é simétrica em relação ao plano xz .

Além disso, a ausência da variável u na equação K do helicóide produz um comportamento cilíndrico no gráfico de K , isto é, a curva

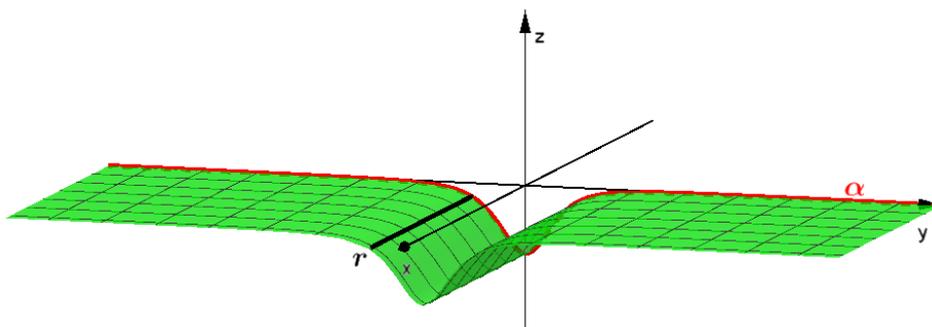
$$\alpha(v) = \left(0, v, -\frac{a^2}{(v^2 + a^2)^2}\right), \quad v \in \mathbb{R},$$

é a diretriz do gráfico de K e o segmento de reta r de comprimento 2π paralelo ao plano xy e perpendicular à curva α é a geratriz do gráfico de K (Figura 31). Isto implica que o valor de α no ponto v indica o valor de K no ponto (u, v) .

Por conta disso, para analisar a curvatura Gaussiana do helicóide usaremos a interseção do gráfico de K com o plano yz (Figura 32) de equação

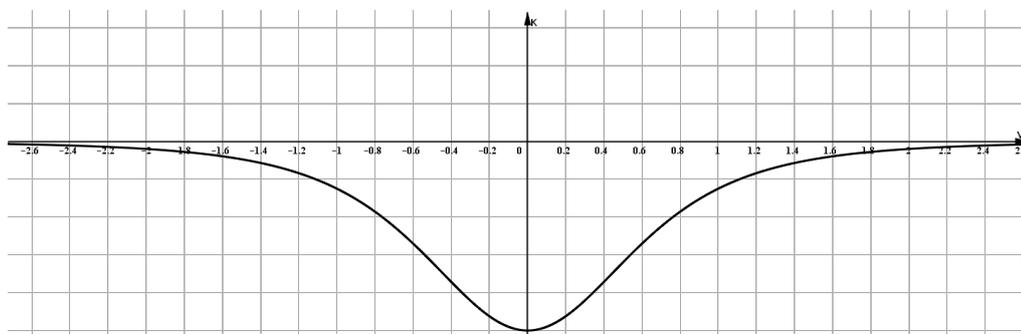
$$k(v) = -\frac{a^2}{(v^2 + a^2)^2}, \quad v \in \mathbb{R}.$$

Figura 31 – Diretriz e Geratriz do Gráfico da Curvatura Gaussiana do Helicóide



Fonte: Autor.

Figura 32 – Interseção do Gráfico da Curvatura Gaussiana do Helicóide com o Plano yz



Fonte: Autor.

(i) *Análise dos pontos onde a curvatura Gaussiana se anula*

Veja que, para todo $v \in \mathbb{R}$, com $a \in \mathbb{R}^*$, temos que

$$k(v) = -\frac{a^2}{(v^2 + a^2)^2} \neq 0.$$

Logo, a curvatura Gaussiana K do helicóide nunca se anula.

Além disso, note que para $v \in \mathbb{R}$ temos que

$$\lim_{|v| \rightarrow \infty} -\frac{a^2}{(v^2 + a^2)^2} = 0,$$

ou seja, a curvatura Gaussiana do helicóide se aproxima de zero na medida que v cresce ou decresce infinitamente.

(ii) *Análise dos pontos onde a curvatura Gaussiana é positiva ou negativa*

Veja que, para todo $v \in \mathbb{R}$, com $a \in \mathbb{R}^*$, temos que

$$k(v) = -\frac{a^2}{(v^2 + a^2)^2} < 0.$$

Logo, a curvatura Gaussiana K do helicóide é sempre negativa.

(iii) *Análise dos pontos de máximo e mínimo da curvatura Gaussiana*

Para fazer esta análise primeiramente devemos encontrar os candidatos a máximo e mínimo local, que são os pontos críticos da curva k . Para isto, faremos o teste da primeira derivada.

$$\begin{aligned} k'(v) &= - \frac{-a^2 \cdot 2(v^2 + a^2) \cdot 2v}{[(v^2 + a^2)^2]^2} \\ &= \frac{4a^2v(v^2 + a^2)}{(v^2 + a^2)^4} \\ &= \frac{4a^2v}{(v^2 + a^2)^3}. \end{aligned}$$

Fazendo $k'(v) = 0$, temos

$$\frac{4a^2v}{(v^2 + a^2)^3} = 0 \Rightarrow 4a^2v = 0 \Rightarrow v = 0.$$

Logo, o ponto $v = 0$ é o único ponto crítico, e, portanto, o único candidato a máximo e mínimo local.

Para concluir se $v = 0$ é ponto de máximo ou mínimo local faremos o teste da segunda derivada.

$$\begin{aligned} k''(v) &= \frac{4a^2 \cdot (v^2 + a^2)^3 - 4a^2v \cdot 3(v^2 + a^2)^2 \cdot 2v}{[(v^2 + a^2)^3]^2} \\ &= \frac{4a^2(v^2 + a^2)^3 - 24a^2v^2(v^2 + a^2)^2}{(v^2 + a^2)^6} \\ &= \frac{(v^2 + a^2)^2(4a^2(v^2 + a^2) - 24a^2v^2)}{(v^2 + a^2)^6} \\ &= \frac{4a^2(v^2 + a^2) - 24a^2v^2}{(v^2 + a^2)^4} \\ &= \frac{4a^2v^2 + 4a^4 - 24a^2v^2}{(v^2 + a^2)^4} \\ &= \frac{4a^4 - 20a^2v^2}{(v^2 + a^2)^4}. \end{aligned}$$

Substituindo $v = 0$ em k'' , temos

$$k''(0) = \frac{4a^4 - 20a^2(0)^2}{((0)^2 + a^2)^4} = \frac{4a^4}{a^8} = \frac{4}{a^4}.$$

Como $a^4 > 0$, para todo $a \in \mathbb{R}^*$, então

$$k''(0) = \frac{4}{a^4} > 0,$$

para todo $a \in \mathbb{R}^*$. Portanto, $v = 0$ é um ponto de mínimo local.

Agora, vamos verificar se os pontos (u, v) com $v = 0$ são pontos de mínimo globais. Para que (u, v) com $v = 0$ sejam pontos de mínimo globais, devemos verificar que para todo $v \in \mathbb{R}$, com $a \in \mathbb{R}^*$,

$$k(v) \geq k(0),$$

onde

$$k(v) = -\frac{a^2}{(v^2 + a^2)^2}$$

e

$$k(0) = -\frac{1}{a^2}.$$

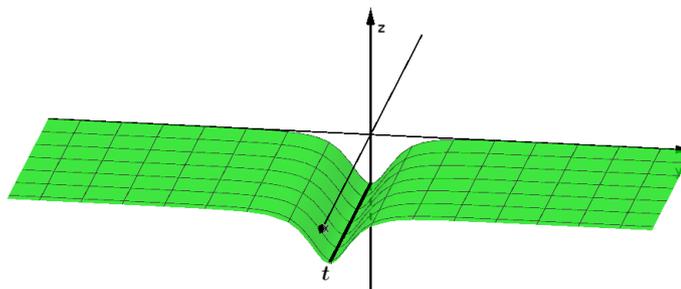
Notemos que para todo $v \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}^*$, temos

$$\begin{aligned} v^2 + a^2 &\geq a^2 \\ \Rightarrow (v^2 + a^2)^2 &\geq (a^2)^2 \\ \Rightarrow -(v^2 + a^2)^2 &\leq -(a^2)^2 \\ \Rightarrow -\frac{1}{(v^2 + a^2)^2} &\geq -\frac{1}{(a^2)^2} \\ \Rightarrow -\frac{a^2}{(v^2 + a^2)^2} &\geq -\frac{a^2}{(a^2)^2} \\ \Rightarrow -\frac{a^2}{(v^2 + a^2)^2} &\geq -\frac{1}{a^2} \\ \Rightarrow k(v) &\geq k(0). \end{aligned}$$

Portanto, os pontos (u, v) com $v = 0$ são mínimo globais, ou seja, em todos os pontos (u, v) com $v = 0$ do helicóide a curvatura Gaussiana será mínima. Estes pontos estão representados no gráfico de K pelo segmento de reta t de comprimento 2π (Figura 33), tal que

$$t(u) = \left(u, 0, -\frac{1}{a^2}\right), \quad 0 < u < 2\pi.$$

Figura 33 – Pontos de Mínimo no Gráfico da Curvatura Gaussiana do Helicóide

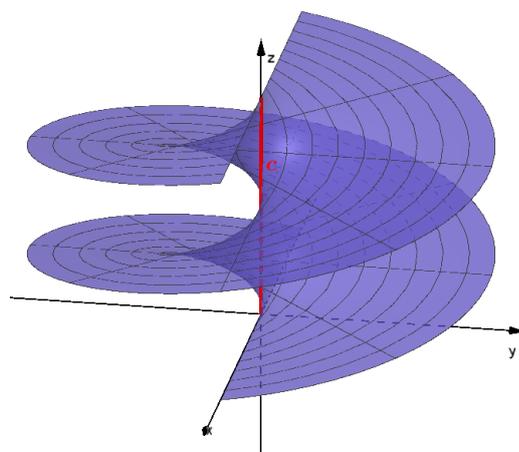


Fonte: Autor.

Estes mesmos pontos, $(u, v) = (u, 0)$, estão representados no gráfico do helicóide pelo segmento de reta c de comprimento $2a\pi$ (Figura 34), tal que

$$c(u) = (0, 0, au), \quad 0 < u < 2\pi.$$

Figura 34 – Gráfico dos Pontos do Helicóide onde a Curvatura Gaussiana é Mínima



Fonte: Autor.

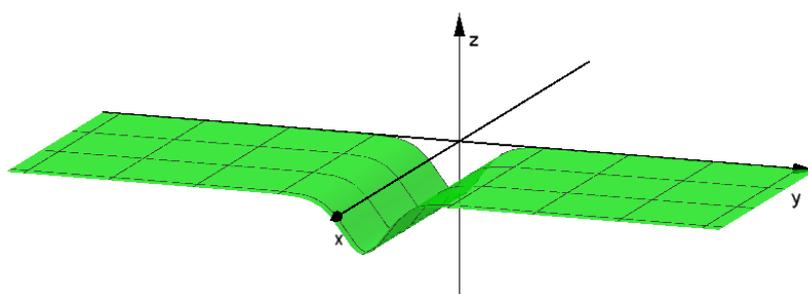
3.3.2 Catenóide

Exemplo 3.3.2. Do Exemplo 2.20.1 temos que a função curvatura Gaussiana K do catenóide é a função $K : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$K(u, v) = -\frac{1}{a^2 \cosh^4 v},$$

onde $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < 2\pi \text{ e } v \in \mathbb{R}\}$ e cujo gráfico de K é representado na Figura 35.

Figura 35 – Gráfico da Curvatura Gaussiana do Catenóide



Fonte: Autor.

Primeiramente, como $\cosh(v) = \cosh(-v)$, temos que a curvatura Gaussiana nos pontos (u, v) e $(u, -v)$ são iguais, isto é,

$$K(u, v) = -\frac{1}{a^2 \cosh^4 v} = -\frac{1}{a^2 \cosh^4(-v)} = K(u, -v).$$

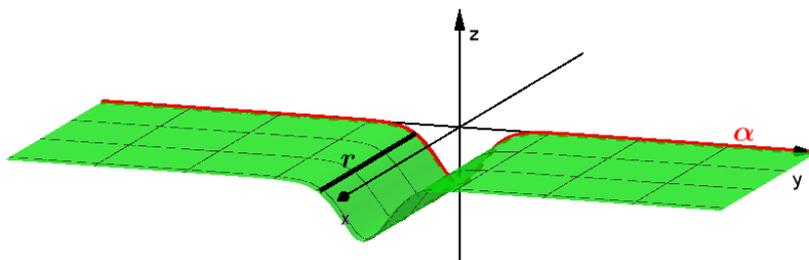
Logo, a curvatura Gaussiana dos pontos do catenóide é simétrica em relação ao plano xz . Este fato pode ser observado na Figura 35.

Além disso, a ausência da variável u na equação K do catenóide produz um comportamento cilíndrico no gráfico de K , isto é, a curva

$$\alpha(v) = \left(0, v, -\frac{1}{a^2 \cosh^4 v}\right), \quad v \in \mathbb{R},$$

é a diretriz do gráfico de K e o segmento de reta r de comprimento 2π paralelo ao plano xy e perpendicular à curva α é a geratriz do gráfico de K (Figura 36). Isto implica que o valor de α no ponto v indica o valor de K no ponto (u, v) .

Figura 36 – Diretriz e Geratriz do Gráfico da Curvatura Gaussiana do Catenóide



Fonte: Autor.

Por conta disso, para analisar a curvatura Gaussiana do catenóide usaremos a interseção do gráfico de K com o plano yz de equação

$$k(v) = -\frac{1}{a^2 \cosh^4 v}, \quad v \in \mathbb{R}.$$

(i) *Análise dos pontos onde a curvatura Gaussiana se anula*

Veja que para todo $v \in \mathbb{R}$, com $a \in \mathbb{R}^*$, temos que

$$k(v) = -\frac{1}{a^2 \cosh^4 v} \neq 0.$$

Logo, a curvatura Gaussiana K do catenóide nunca se anula.

Além disso, note que para $v \in \mathbb{R}$ temos que

$$\lim_{|v| \rightarrow \infty} -\frac{1}{a^2 \cosh^4 v} = 0,$$

ou seja, a curvatura Gaussiana dos pontos do catenóide se aproxima de zero na medida que v cresce ou decresce infinitamente.

(ii) *Análise dos pontos onde a curvatura Gaussiana é positiva ou negativa*

Veja que para todo $v \in \mathbb{R}$, com $a \in \mathbb{R}^*$, temos que

$$k(v) = -\frac{1}{a^2 \cosh^4 v} < 0.$$

Logo, a curvatura Gaussiana K do catenóide é sempre negativa.

(iii) *Análise dos pontos de máximo e mínimo da curvatura Gaussiana*

Para fazer esta análise primeiramente devemos encontrar os candidatos a máximo e mínimo local, que são os pontos críticos da curva k . Para isto, faremos o teste da primeira derivada.

$$k'(v) = -\frac{-1 \cdot a^2 4 \cosh^3 v \cdot \sinh v}{(a^2 \cosh^4 v)^2}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{4a^2 \cosh^3 v \sinh v}{a^4 \cosh^8 v} \\ &= \frac{4 \sinh v}{a^2 \cosh^5 v}. \end{aligned}$$

Fazendo $k'(v) = 0$, temos

$$\frac{4 \sinh v}{a^2 \cosh^5 v} = 0 \Rightarrow 4 \sinh v = 0 \Rightarrow \sinh v = 0 \Rightarrow v = 0.$$

Logo, o ponto $v = 0$ é o único ponto crítico, e, portanto, o único candidato a máximo e mínimo local.

Para concluir se $v = 0$ é ponto de máximo ou mínimo local faremos o teste da segunda derivada.

$$\begin{aligned} k''(v) &= \frac{4 \cosh v \cdot a^2 \cosh^5 v - 4 \sinh v \cdot a^2 5 \cosh^4 v \cdot \sinh v}{(a^2 \cosh^5 v)^2} \\ &= \frac{4a^2 \cosh^6 v - 20a^2 \sinh^2 v \cosh^4 v}{a^4 \cosh^{10} v} \\ &= \frac{a^2 \cosh^4 v (4 \cosh^2 v - 20 \sinh^2 v)}{a^4 \cosh^{10} v} \\ &= \frac{4 \cosh^2 v - 20 \sinh^2 v}{a^2 \cosh^6 v}. \end{aligned}$$

Substituindo $v = 0$ em k'' , temos

$$k''(0) = \frac{4 \cosh^2 0 - 20 \sinh^2 0}{a^2 \cosh^6 0} = \frac{4}{a^2}.$$

Como $a^2 > 0$, para todo $a \in \mathbb{R}^*$, então

$$k''(0) = \frac{4}{a^2} > 0$$

para todo $a \in \mathbb{R}^*$. Portanto, $v = 0$ é um ponto de mínimo local.

Agora, vamos verificar se $v = 0$ é um ponto de mínimo global. Para que $v = 0$ seja um ponto de mínimo global, devemos verificar que para todo $v \in \mathbb{R}$, com $a \in \mathbb{R}^*$,

$$k(v) \geq k(0),$$

onde

$$k(v) = -\frac{1}{a^2 \cosh^4 v}$$

e

$$k(0) = -\frac{1}{a^2}.$$

Como $\cosh v \geq 1$ para todo $v \in \mathbb{R}$. Assim, para $a \in \mathbb{R}^*$ temos que

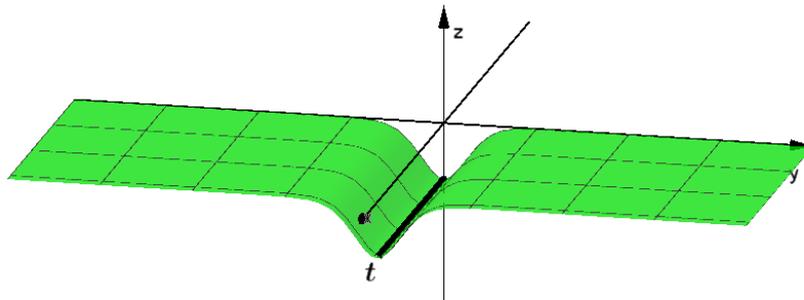
$$a^2 \cosh^4 v \geq a^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{a^2 \cosh^4 v} &\leq \frac{1}{a^2} \\ \Rightarrow -\frac{1}{a^2 \cosh^4 v} &\geq -\frac{1}{a^2} \\ \Rightarrow k(v) &\geq k(0). \end{aligned}$$

Portanto, o ponto $v = 0$ é mínimo global, ou seja, em todos os pontos $(u, v) = (u, 0)$ do helicóide a curvatura Gaussiana será mínima. Estes pontos estão representados no gráfico de K pelo segmento de reta t de comprimento 2π (Figura 37), tal que

$$t(u) = \left(u, 0, -\frac{1}{a^2}\right), \quad 0 < u < 2\pi.$$

Figura 37 – Pontos de Mínimo no Gráfico da Curvatura Gaussiana do Catenóide

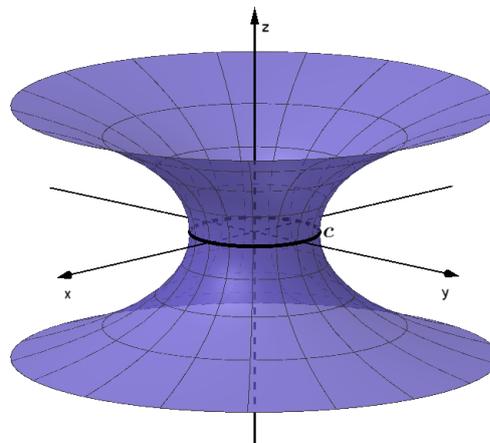


Fonte: Autor.

Estes mesmos pontos, $(u, v) = (u, 0)$, estão representados no gráfico do catenóide pela circunferência c na Figura 38, tal que

$$c(u) = (a \cos u, a \sin u, 0), \quad 0 < u < 2\pi.$$

Figura 38 – Gráfico dos Pontos do Catenóide onde a Curvatura Gaussiana é Mínima



Fonte: Autor.

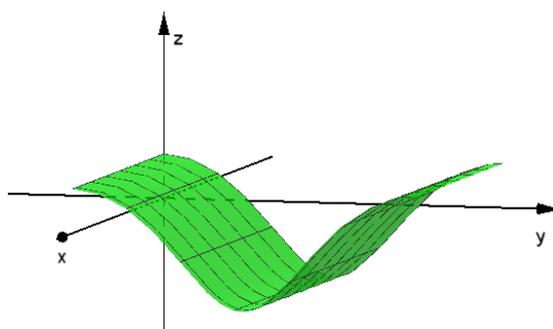
3.3.3 Toro

Exemplo 3.3.3. Do Exemplo 2.19.1 temos que a função curvatura K do toro é a função $K : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$K(u, v) = \frac{\cos v}{r(a + r \cos v)},$$

onde $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < 2\pi \text{ e } 0 < v < 2\pi\}$ e cujo gráfico de K é representado na Figura 39.

Figura 39 – Gráfico da Curvatura Gaussiana do Toro



Fonte: Autor.

Observação 3.3.1. A parametrização X do Exemplo 2.19.1 cobre o toro, exceto por um meridiano e um paralelo, isto é, não cobre os pontos $(0, v)$ com $0 < v < 2\pi$ e $(u, 0)$ com $0 < u < 2\pi$. No entanto, para cobrir estes pontos do toro, basta tomar como domínio uma outra vizinhança coordenada, por exemplo, $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; \pi < u < 3\pi \text{ e } \pi < v < 3\pi\}$. Assim, para a análise da curvatura Gaussiana do toro, consideraremos $v = 0$ e $v = 2\pi$ pertencentes ao domínio de K .

Primeiramente, como $\cos v = \cos(2\pi - v)$, $0 \leq v \leq 2\pi$, temos que a curvatura Gaussiana nos pontos (u, v) e $(u, 2\pi - v)$ são iguais, isto é,

$$K(u, v) = \frac{\cos v}{r(a + r \cos v)} = \frac{\cos(2\pi - v)}{r(a + r \cos(2\pi - v))} = K(u, 2\pi - v).$$

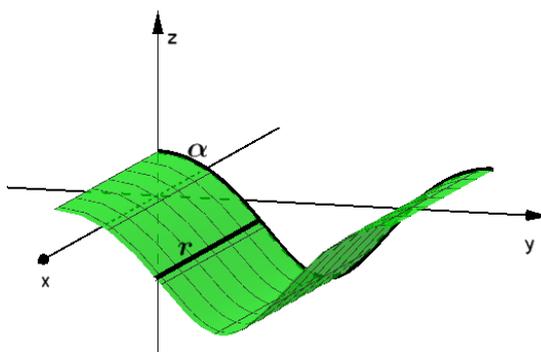
Logo, a curvatura Gaussiana dos pontos do toro é simétrica em relação ao plano $y = \pi$.

Além disso, a ausência da variável u na equação K do toro produz um comportamento cilíndrico no gráfico de K , isto é, a curva

$$\alpha(v) = \left(0, v, \frac{\cos v}{r(a + r \cos v)} \right), \quad 0 \leq v \leq 2\pi,$$

é a diretriz do gráfico de K e o segmento de reta r paralelo ao plano xy e perpendicular à curva α é a geratriz do gráfico de K (Figura 40). Isto implica que o valor de α no ponto v indica o valor de K no ponto (u, v) .

Figura 40 – Diretriz e Geratriz do Gráfico da Curvatura Gaussiana do Toro

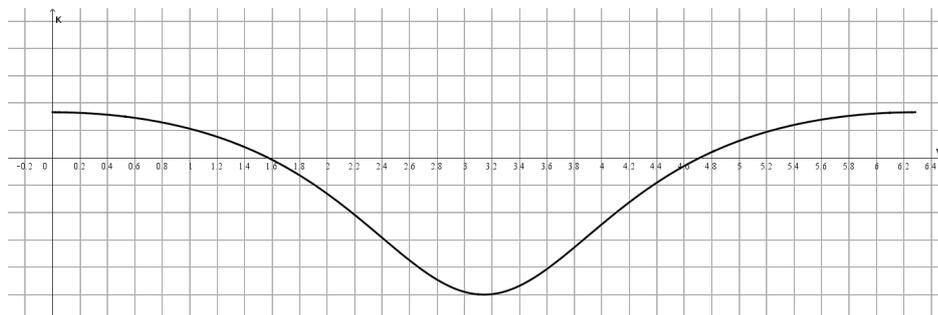


Fonte: Autor.

Por conta disso, para analisar a curvatura Gaussiana do toro usaremos a interseção do gráfico de K com o plano yz (Figura 41) de equação

$$k(v) = \frac{\cos v}{r(a + r \cos v)}, \quad 0 \leq v \leq 2\pi.$$

Figura 41 – Interseção do Gráfico da Curvatura Gaussiana do Toro com o Plano yz



Fonte: Autor.

(i) *Análise dos pontos onde a curvatura Gaussiana se anula*

Temos

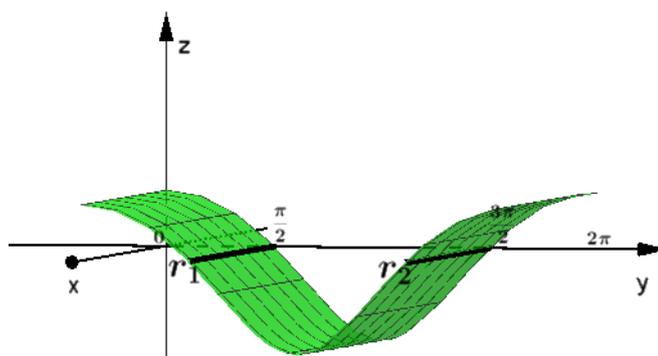
$$k(v) = 0 \Rightarrow \frac{\cos v}{r(a + r \cos v)} = 0 \Rightarrow \cos v = 0 \Rightarrow v = \frac{\pi}{2} \text{ e } v = \frac{3\pi}{2}.$$

Logo, a curvatura Gaussiana do toro se anula nos pontos onde $v = \frac{\pi}{2}$ e $v = \frac{3\pi}{2}$, isto é, em todos os pontos $(u, v) = \left(u, \frac{\pi}{2}\right)$ e $(u, v) = \left(u, \frac{3\pi}{2}\right)$. Estes pontos estão representados no gráfico de K pelos segmentos de reta r_1 e r_2 (Figura 42), onde

$$r_1(u) = \left(u, \frac{\pi}{2}, 0\right), \quad 0 < u < 2\pi,$$

$$r_2(u) = \left(u, \frac{3\pi}{2}, 0\right), \quad 0 < u < 2\pi.$$

Figura 42 – Pontos do Gráfico da Curvatura Gaussiana do Toro onde K é Nula



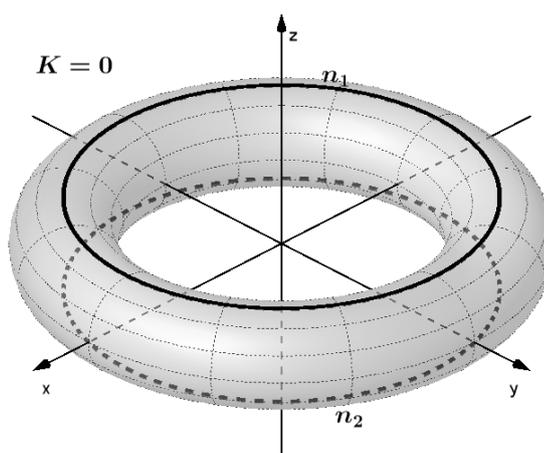
Fonte: Autor.

Estes mesmos pontos, $(u, v) = \left(u, \frac{\pi}{2}\right)$ e $(u, v) = \left(u, \frac{3\pi}{2}\right)$, estão representados no gráfico do toro pelas curvas n_1 e n_2 (Figura 43) dadas por

$$n_1(u) = (a \cos u, a \sin u, r), \quad 0 < u < 2\pi,$$

$$n_2(u) = (a \cos u, a \sin u, -r), \quad 0 < u < 2\pi.$$

Figura 43 – Gráfico dos Pontos do Toro onde a Curvatura Gaussiana é Nula



Fonte: Autor.

(ii) Análise dos pontos onde a curvatura Gaussiana é positiva ou negativa

Na parametrização X do toro temos que $r, a \in \mathbb{R}_+^*$, com $r > 0$ e $a > r$. Como $-1 \leq \cos v \leq 1$, então $a > r \cdot \cos v$. Assim, a expressão do denominador de k dada por

$$r(a + r \cos v)$$

é positiva para todo $v \in \mathbb{R}$, ou seja, o sinal de k depende apenas do sinal do numerador $\cos v$.

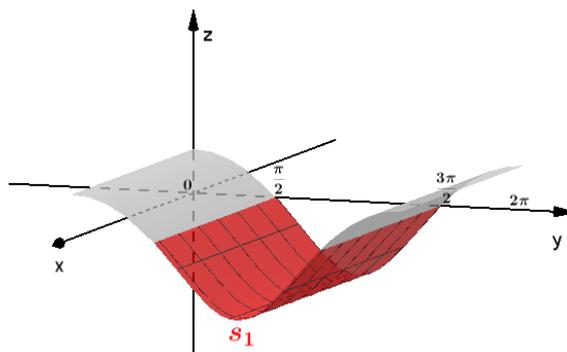
Daí, como $\cos v < 0$ para $\frac{\pi}{2} < v < \frac{3\pi}{2}$, então nestes pontos

$$k(v) < 0,$$

isto é, a curvatura Gaussiana K do toro é negativa nos pontos (u, v) tal que $\frac{\pi}{2} < v < \frac{3\pi}{2}$. Estes pontos estão representados no gráfico de K pela região s_1 (Figura 44), onde

$$s_1(u, v) = \frac{\cos v}{r(a + r \cos v)}, \quad 0 < u < 2\pi, \quad \frac{\pi}{2} < v < \frac{3\pi}{2}.$$

Figura 44 – Pontos do Gráfico da Curvatura Gaussiana do Toro onde K é Negativa

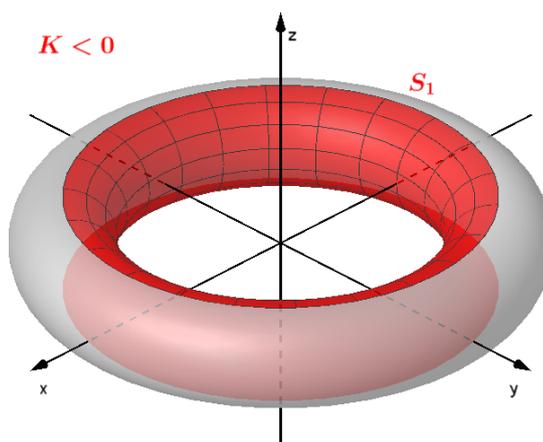


Fonte: Autor.

Estes mesmos pontos, (u, v) tal que $\frac{\pi}{2} < v < \frac{3\pi}{2}$, estão representados no gráfico do toro pela região S_1 (Figura 45) dada por

$$S_1(u, v) = ((a + r \cos v) \cos u, (a + r \cos v) \sin u, r \sin v), \quad 0 < u < 2\pi, \quad \frac{\pi}{2} < v < \frac{3\pi}{2}.$$

Figura 45 – Gráfico dos Pontos do Toro onde a Curvatura Gaussiana é Negativa



Fonte: Autor.

Analogamente, como $\cos v > 0$ para $0 < v < \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2} < v < 2\pi$, então nestes pontos

$$k(v) > 0,$$

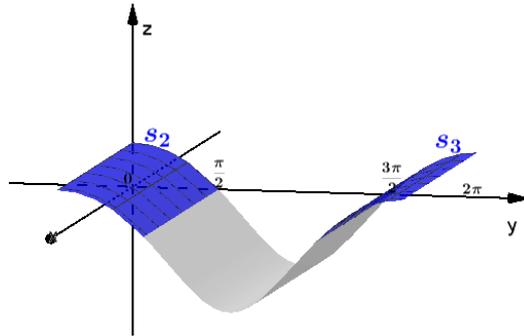
isto é, a curvatura Gaussiana K do toro é positiva nos pontos (u, v) tal que $0 < v < \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2} < v < 2\pi$. Estes pontos estão representados no gráfico de K

pelas regiões s_2 e s_3 (Figura 46), onde

$$s_2(u, v) = \frac{\cos v}{r(a + r \cos v)}, \quad 0 < u < 2\pi, \quad 0 < v < \frac{\pi}{2},$$

$$s_3(u, v) = \frac{\cos v}{r(a + r \cos v)}, \quad 0 < u < 2\pi, \quad \frac{3\pi}{2} < v < 2\pi.$$

Figura 46 – Pontos do Gráfico da Curvatura Gaussiana do Toro onde K é Positiva



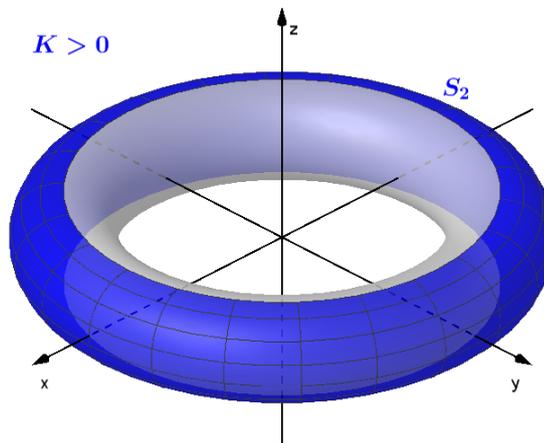
Fonte: Autor.

Estes mesmos pontos, (u, v) tal que $0 < v < \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2} < v < 2\pi$, estão representados no gráfico do toro pela região S_2 (Figura 47) dada por

$$S_2(u, v) = ((a + r \cos v) \cos u, (a + r \cos v) \sin u, r \sin v),$$

onde $0 < u < 2\pi$ e $0 < v < \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2} < v < 2\pi$.

Figura 47 – Gráfico dos Pontos do Toro onde a Curvatura Gaussiana é Positiva



Fonte: Autor.

(iii) Análise dos pontos de máximo e mínimo da curvatura Gaussiana

Para fazer esta análise primeiramente devemos encontrar os candidatos a máximo e mínimo local, que são os pontos críticos da curva k . Para isto, faremos o teste da primeira derivada.

$$k'(v) = \frac{-\sin v \cdot (ra + r^2 \cos v) - \cos v \cdot r^2(-\sin v)}{(ra + r^2 \cos v)^2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{-ra \operatorname{sen} v - r^2 \operatorname{sen} v \cos v + r^2 \operatorname{sen} v \cos v}{(ra + r^2 \cos v)^2} \\
 &= \frac{-ra \operatorname{sen} v}{(ra + r^2 \cos v)^2} \\
 &= -\frac{ra \operatorname{sen} v}{(r(a + r \cos v))^2} \\
 &= -\frac{a \operatorname{sen} v}{r(a + r \cos v)^2}.
 \end{aligned}$$

Fazendo $k'(v) = 0$, temos

$$-\frac{a \operatorname{sen} v}{r(a + r \cos v)^2} = 0 \Rightarrow -a \operatorname{sen} v = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} v = 0 \Rightarrow v = 0, v = 2\pi \text{ e } v = \pi.$$

Logo, os pontos $v = 0$, $v = \pi$ e $v = 2\pi$ são os únicos pontos críticos de k , e, portanto, os únicos candidatos a máximos e mínimos locais.

Para concluir se $v = 0$, $v = \pi$ e $v = 2\pi$ são pontos de máximos ou mínimos locais faremos o teste da segunda derivada.

$$\begin{aligned}
 k''(v) &= -\frac{a \cos v (r(a + r \cos v)^2) - a \operatorname{sen} v \cdot r \cdot 2(a + r \cos v)r(-\operatorname{sen} v)}{(r(a + r \cos v)^2)^2} \\
 &= \frac{-ar \cos v (a + r \cos v)^2 - 2ar^2 \operatorname{sen}^2 v (a + r \cos v)}{r^2 (a + r \cos v)^4} \\
 &= \frac{r(a + r \cos v)(-a \cos v (a + r \cos v) - 2ar \operatorname{sen}^2 v)}{r^2 (a + r \cos v)^4} \\
 &= \frac{-a \cos v (a + r \cos v) - 2ar \operatorname{sen}^2 v}{r(a + r \cos v)^3} \\
 &= -\frac{a \cos v (a + r \cos v) + 2ar \operatorname{sen}^2 v}{r(a + r \cos v)^3}.
 \end{aligned}$$

Substituindo $v = 0$ em k'' , temos

$$k''(0) = -\frac{a \cos 0 (a + r \cos 0) + 2ar \operatorname{sen}^2 0}{r(a + r \cos 0)^3} = -\frac{a(a + r)}{r(a + r)^3} = -\frac{a}{r(a + r)^2}.$$

Como $r, a \in \mathbb{R}_+^*$, então

$$k''(0) = -\frac{a}{r(a + r)^2} < 0.$$

Portanto, $v = 0$ é um ponto de máximo local. Como $\cos 0 = \cos 2\pi$, então $v = 2\pi$ é também um ponto de máximo local.

Agora, vamos verificar se $v = 0$ e $v = 2\pi$ são pontos de máximo global. Neste caso verificaremos para $v = 0$ e a conclusão será a mesma para $v = 2\pi$. Para que $v = 0$ seja um ponto de máximo global, devemos verificar que para todo $v \in [0, 2\pi]$, com $r, a \in \mathbb{R}_+^*$,

$$k(0) \geq k(v),$$

onde

$$k(v) = \frac{\cos v}{r(a + r \cos v)}$$

e

$$k(0) = \frac{1}{ra + r^2}.$$

Temos que para todo $0 < v < \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2} < v < 2\pi$, $\cos v > 0$. Assim, para $r, a \in \mathbb{R}_+^*$, temos

$$\begin{aligned} & \cos v \cdot ra \leq ra, \\ \Rightarrow & \cos v \cdot ra + r^2 \cos v \leq ra + r^2 \cos v \\ \Rightarrow & \cos v(ra + r^2) \leq ra + r^2 \cos v \\ \Rightarrow & \frac{1}{\cos v(ra + r^2)} \geq \frac{1}{ra + r^2 \cos v} \\ \Rightarrow & \frac{\cos v}{\cos v(ra + r^2)} \geq \frac{\cos v}{ra + r^2 \cos v} \\ \Rightarrow & \frac{1}{ra + r^2} \geq \frac{\cos v}{r(a + r \cos v)} \\ \Rightarrow & k(0) \geq k(v). \end{aligned}$$

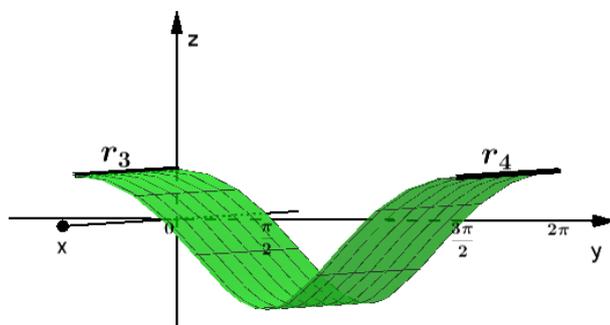
Logo os pontos $v = 0$ e $v = 2\pi$ são pontos de máximo global.

Portanto, a curvatura Gaussiana K do toro é máxima nos pontos $(u, v) = (u, 0)$ e $(u, v) = (u, 2\pi)$. Estes pontos estão representados no gráfico de K pelos segmentos de reta r_3 e r_4 (Figura 48), tais que

$$r_3(u) = \left(u, 0, \frac{1}{r(a+r)}\right), \quad 0 < u < 2\pi,$$

$$r_4(u) = \left(u, 2\pi, \frac{1}{r(a+r)}\right), \quad 0 < u < 2\pi.$$

Figura 48 – Pontos de Máximo no Gráfico da Curvatura Gaussiana do Toro



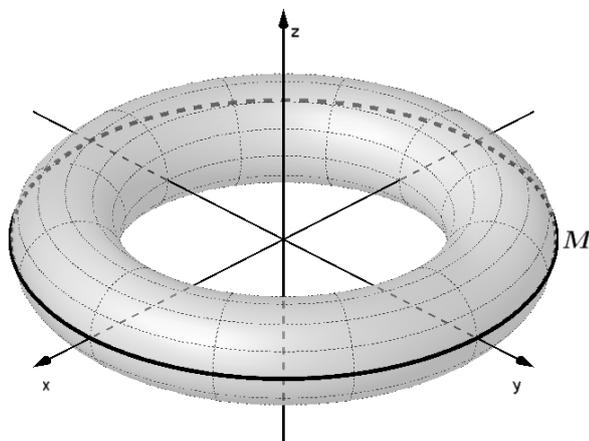
Fonte: Autor.

Estes mesmos pontos, $(u, v) = (u, 0)$ e $(u, v) = (u, 2\pi)$, estão representados no gráfico do toro pela curva M (Figura 49) dada por

$$M(u) = ((a+r) \cos u, (a+r) \sin u, 0), \quad 0 < u < 2\pi,$$

uma vez que na parametrização do toro os pontos $v = 0$ e $v = 2\pi$ são coincidentes, ou seja, no toro os pontos $(u, v) = (u, 0)$ e $(u, v) = (u, 2\pi)$ são coincidentes.

Figura 49 – Gráfico dos Pontos do Toro onde a Curvatura Gaussiana é Máxima



Fonte: Autor.

Por outro lado, substituindo $v = \pi$ em k'' , temos

$$k''(\pi) = -\frac{a \cos \pi (a + r \cos \pi) + 2ar \operatorname{sen}^2 \pi}{r(a + r \cos \pi)^3} = -\frac{-a(a - r)}{r(a - r)^3} = \frac{a}{r(a - r)^2}.$$

Como $r, a \in \mathbb{R}_+^*$, então

$$k''(\pi) = \frac{a}{r(a - r)^2} > 0.$$

Portanto, $v = \pi$ é um ponto de mínimo local.

Agora, vamos verificar se $v = \pi$ é um ponto de mínimo global. Para que $v = \pi$ seja um ponto de mínimo global, devemos verificar que para todo $v \in [0, 2\pi]$, com $r, a \in \mathbb{R}_+^*$,

$$k(\pi) \leq k(v),$$

onde

$$K(v) = \frac{\cos v}{r(a + r \cos v)}$$

e

$$K(\pi) = -\frac{1}{ra - r^2}.$$

Temos que para todo $\frac{\pi}{2} < v < \frac{3\pi}{2}$, $\cos v < 0$. Assim, para $r, a \in \mathbb{R}_+^*$, temos

$$\begin{aligned} & -r^2 \leq r^2 \cos v \\ \Rightarrow & ar - r^2 \leq ar + r^2 \cos v \\ \Rightarrow & \cos v(ar - r^2) \leq ar + r^2 \cos v \\ \Rightarrow & \frac{1}{\cos v(ar - r^2)} \geq \frac{1}{ar + r^2 \cos v} \end{aligned}$$

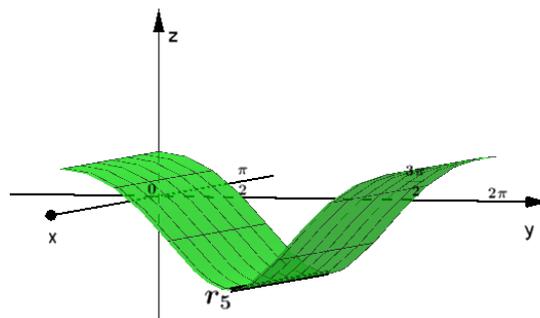
$$\begin{aligned} \Rightarrow & \frac{\cos v}{\cos v(ar - r^2)} \leq \frac{\cos v}{r(a + r \cos v)} \\ \Rightarrow & \frac{1}{ar - r^2} \leq \frac{\cos v}{r(a + r \cos v)} \\ \Rightarrow & -\frac{1}{ar - r^2} \leq \frac{\cos v}{r(a + r \cos v)} \\ \Rightarrow & k(\pi) \leq k(v). \end{aligned}$$

Logo o ponto $v = \pi$ é um ponto de mínimo global.

Portanto, a curvatura Gaussiana K do toro é mínima nos pontos $(u, v) = (u, \pi)$. Estes pontos estão representados no gráfico de K pelo segmento de reta r_5 (Figura 50), tal que

$$r_5(u) = \left(u, \pi, \frac{-1}{r(a - r)} \right), \quad 0 < u < 2\pi.$$

Figura 50 – Pontos de Mínimo no Gráfico da Curvatura Gaussiana do Toro

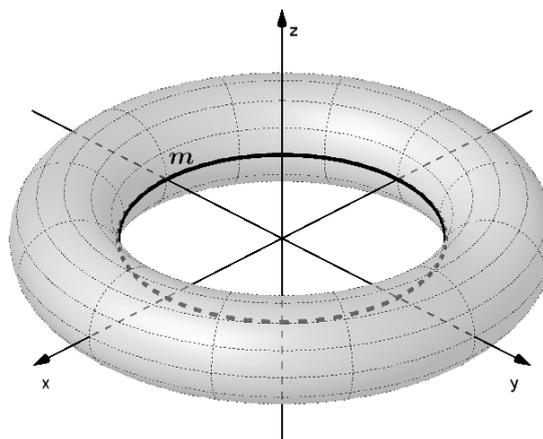


Fonte: Autor.

Estes mesmos pontos, $(u, v) = (u, \pi)$, estão representados no gráfico do toro pela curva m (Figura 51) dada por

$$m(u) = ((a - r) \cos u, (a - r) \sin u, 0), \quad 0 < u < 2\pi.$$

Figura 51 – Gráfico dos Pontos do Toro onde a Curvatura Gaussiana é Mínima



Fonte: Autor.

Portanto, em resumo, concluímos que a curvatura Gaussiana do toro é negativa na região S_1 dada por

$$S_1(u, v) = ((a + r \cos v) \cos u, (a + r \cos v) \sin u, r \sin v), \quad 0 < u < 2\pi, \quad \frac{\pi}{2} < v < \frac{3\pi}{2},$$

é positiva na região S_2 dada por

$$S_2(u, v) = ((a + r \cos v) \cos u, (a + r \cos v) \sin u, r \sin v), \quad 0 < u < 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2},$$

é nula nas curvas n_1 e n_2 dadas por

$$n_1(u) = (a \cos u, a \sin u, r), \quad 0 < u < 2\pi,$$

$$n_2(u) = (a \cos u, a \sin u, -r), \quad 0 < u < 2\pi,$$

é máxima global na curva M dada por

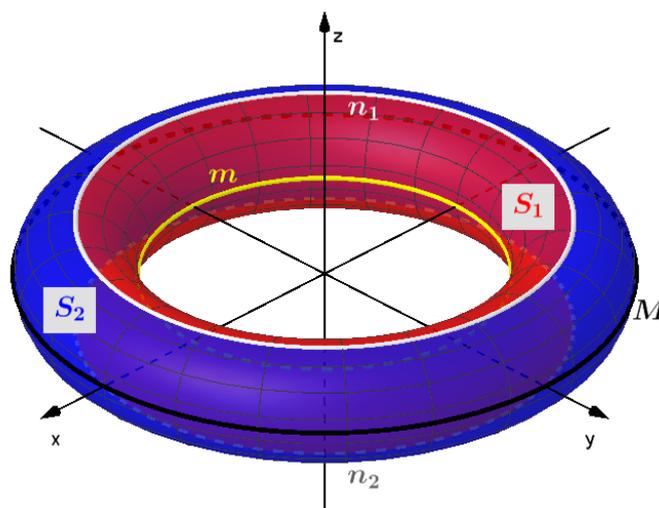
$$M(u) = ((a + r) \cos u, (a + r) \sin u, 0), \quad 0 < u < 2\pi$$

e é mínima global na curva m dada por

$$m(u) = ((a - r) \cos u, (a - r) \sin u, 0), \quad 0 < u < 2\pi,$$

representadas na Figura 52.

Figura 52 – Análise Gráfica da Curvatura Gaussiana do Toro



Fonte: Autor.

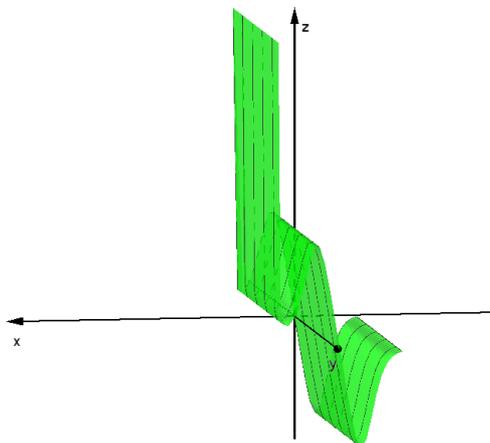
3.3.4 Chapéu de Scherlock

Exemplo 3.3.4. Do Exemplo 2.22.1 temos que a função curvatura K do Chapéu de Scherlock é a função $K : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$K(u, v) = \frac{6u}{(9u^4 + 1)^2(1 - u^3)},$$

onde $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; -1 < u < 1 \text{ e } 0 < v < 2\pi\}$ e cujo gráfico de K é representado na Figura 53.

Figura 53 – Gráfico da Curvatura Gaussiana do Chapéu de Scherlock



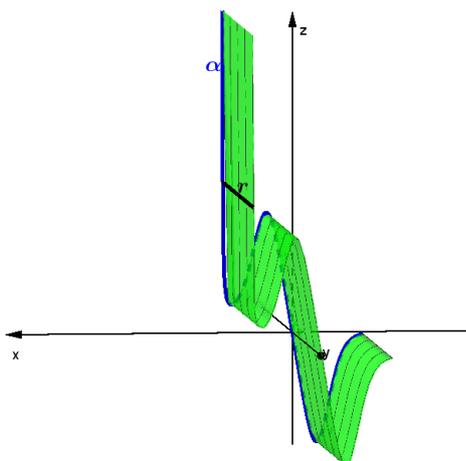
Fonte: Autor.

A ausência da variável v na equação K do chapéu de Scherlock produz um comportamento cilíndrico no gráfico de K , isto é, a curva

$$\alpha(u) = \left(u, 0, \frac{6u}{(9u^4 + 1)^2(1 - u^3)} \right), \quad -1 < u < 1,$$

é a diretriz do gráfico de K e o segmento de reta r paralelo ao plano xy e perpendicular à curva α é a geratriz do gráfico de K (Figura 54). Isto implica que o valor de α no ponto u indica o valor de K no ponto (u, v) .

Figura 54 – Gráfico da Curvatura Gaussiana do Chapéu de Scherlock

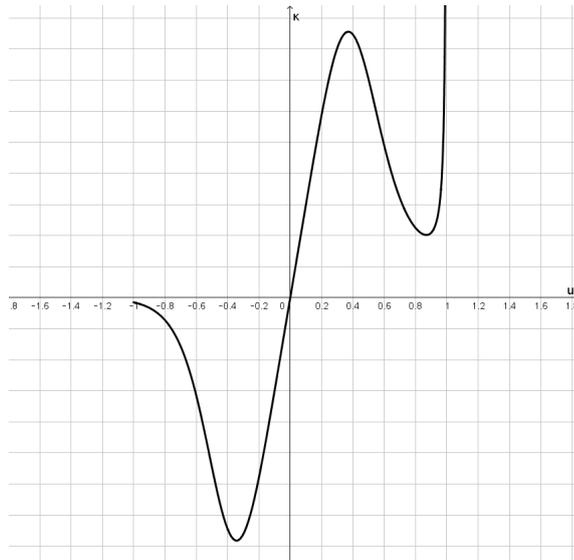


Fonte: Autor.

Por conta disso, para analisar a curvatura Gaussiana do chapéu de Scherlock usaremos a interseção do gráfico de K com o plano xz (Figura 55) de equação

$$k(u) = \frac{6u}{(9u^4 + 1)^2(1 - u^3)}, \quad -1 < u < 1.$$

Figura 55 – Interseção do Gráfico da Curvatura Gaussiana do Chapéu de Scherlock com o Plano xz



Fonte: Autor.

(i) *Análise dos pontos onde a curvatura Gaussiana se anula*

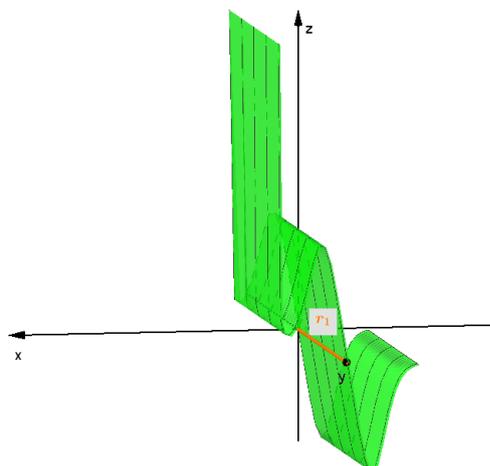
Temos

$$k(u) = 0 \Rightarrow \frac{6u}{(9u^4 + 1)^2(1 - u^3)} = 0 \Rightarrow 6u = 0 \Rightarrow u = 0.$$

Logo, a curvatura Gaussiana do chapéu de Scherlock se anula nos pontos onde $u = 0$, isto é, em todos os pontos $(u, v) = (0, v)$. Estes pontos estão representados no gráfico de K pelo segmento de reta r_1 (Figura 56), tal que

$$r_1(v) = (0, v, 0), \quad 0 < v < 2\pi.$$

Figura 56 – Pontos do Gráfico da Curvatura Gaussiana do Chapéu de Scherlock onde K é Nula

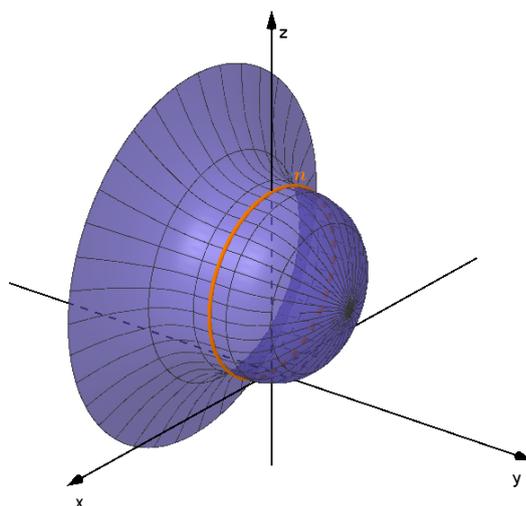


Fonte: Autor.

Estes mesmos pontos, $(u, v) = (0, v)$, estão representados no gráfico do chapéu de Scherlock pela curva n (Figura 57) dada por

$$n(v) = (\cos v, 0, \sin v + 1), \quad 0 < v < 2\pi.$$

Figura 57 – Gráfico dos Pontos do Chapéu de Scherlock onde a Curvatura Gaussiana é Nula



Fonte: Autor.

(ii) Análise dos pontos onde a curvatura Gaussiana é positiva ou negativa

Como $-1 < u < 1$ então a expressão do denominador de k dada por

$$(9u^4 + 1)^2(1 - u^3)$$

é positiva para todo $-1 < u < 1$, ou seja, o sinal de k depende apenas do sinal do numerador $6u$, mais precisamente do sinal de u .

Daí, para $-1 < u < 0$ temos que

$$k(u) < 0,$$

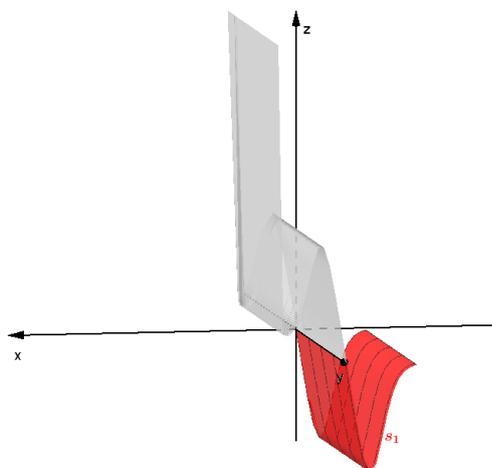
isto é, a curvatura Gaussiana K do chapéu de Scherlock é negativa nos pontos (u, v) tal que $-1 < u < 0$. Estes pontos estão representados no gráfico de K pela região s_1 (Figura 58), tal que

$$s_1(u, v) = \frac{6u}{(9u^4 + 1)^2(1 - u^3)}, \quad -1 < u < 0, \quad 0 < v < 2\pi.$$

Estes mesmos pontos, (u, v) tal que $-1 < u < 0$, estão representados no gráfico do chapéu de Scherlock pela região S_1 (Figura 59) dada por

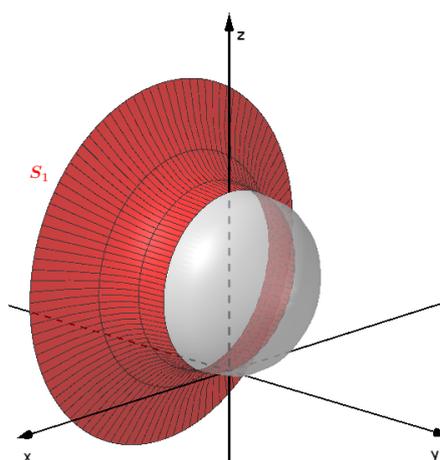
$$S_1(u, v) = ((1 - u^3) \cos v, u, (1 - u^3) \sin v + 1), \quad -1 < u < 0, \quad 0 < v < 2\pi.$$

Figura 58 – Pontos do Gráfico da Curvatura Gaussiana do Chapéu de Scherlock onde K é Negativa



Fonte: Autor.

Figura 59 – Gráfico dos Pontos do Chapéu de Scherlock onde a Curvatura Gaussiana é Negativa



Fonte: Autor.

Analogamente, para $0 < u < 1$ temos que

$$k(u) > 0,$$

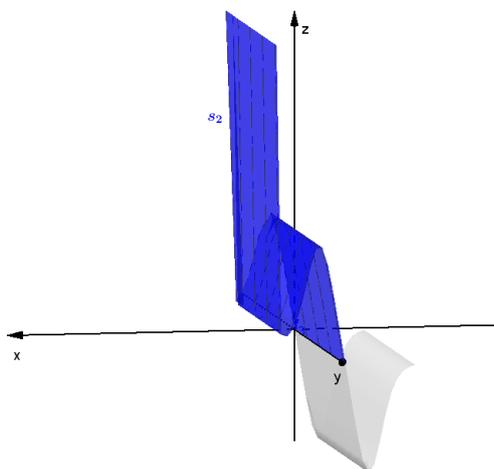
isto é, a curvatura Gaussiana K do chapéu de Scherlock é positiva nos pontos (u, v) tal que $0 < u < 1$. Estes pontos estão representados no gráfico de K pela região s_2 (Figura 60), tal que

$$s_2(u, v) = \frac{6u}{(9u^4 + 1)^2(1 - u^3)}, \quad 0 < u < 1, \quad 0 < v < 2\pi.$$

Estes mesmos pontos, (u, v) tal que $0 < u < 1$, estão representados no gráfico do chapéu de Scherlock pela região S_2 (Figura 61) dada por

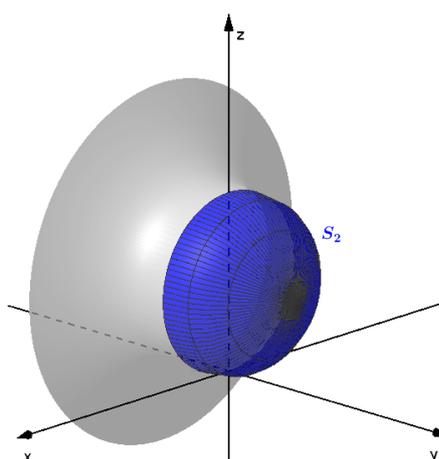
$$S_2(u, v) = ((1 - u^3) \cos v, u, (1 - u^3) \sin v + 1), \quad 0 < u < 1, \quad 0 < v < 2\pi.$$

Figura 60 – Pontos do Gráfico da Curvatura Gaussiana do Chapéu de Sherlock onde K é Positiva



Fonte: Autor.

Figura 61 – Gráfico dos Pontos do Chapéu de Sherlock onde a Curvatura Gaussiana é Positiva



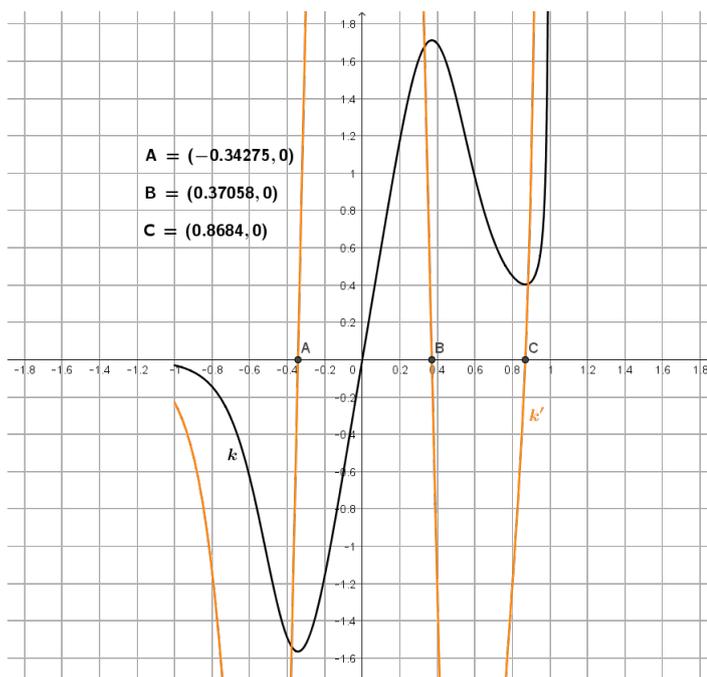
Fonte: Autor.

(iii) *Análise dos pontos de máximo e mínimo da curvatura Gaussiana*

Para fazer esta análise primeiramente devemos encontrar os candidatos a máximo e mínimo local, que são os pontos críticos da curva k . Para isto utilizaremos as ferramentas do cálculo através do software GeoGebra. No ambiente do GeoGebra derivamos a função k e encontraremos as raízes de k' que são os pontos críticos de k como pode ser observado na Figura 62.

Na Figura 62 vemos que os pontos A, B e C são os pontos críticos de k . Como os valores das abscissas desses pontos são números reais não inteiros (no GeoGebra eles foram arredondados para 5 casas decimais), usaremos a notação $x(P)$ para representar a abscissa do ponto P .

Para concluir se $u = x(A)$, $u = x(B)$ e $u = x(C)$ são pontos de máximos ou mínimos locais faremos o teste da segunda derivada. No GeoGebra então derivamos

Figura 62 – Gráfico dos Pontos Críticos de k


Fonte: Autor.

k' e encontramos k'' . Em seguida determinamos o valor de k'' no ponto $x(B)$ onde encontramos

$$k''(x(B)) \approx -43.15177 < 0,$$

e, portanto, $u = x(B)$ é um ponto de máximo local. É possível constatar que $u = x(B)$ não é um ponto de máximo global pois

$$k(x(B)) \approx 1.71215,$$

$$k(0.99) \approx 2.1497,$$

isto é,

$$k(x(B)) < k(0.99).$$

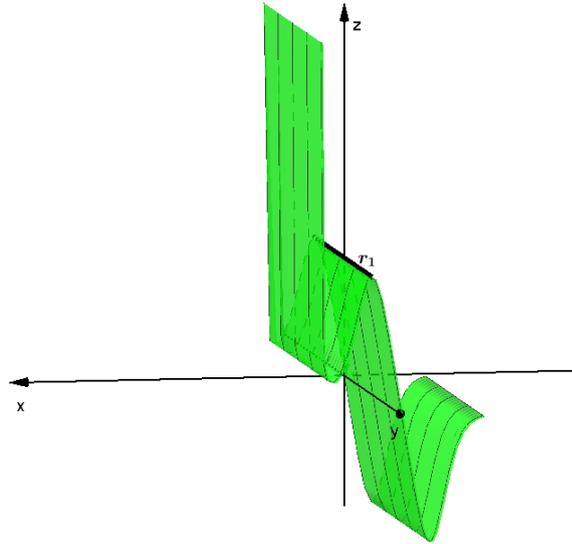
Portanto, a curvatura Gaussiana K do chapéu de Sherlock é máxima numa vizinhança dos pontos $(u, v) = (x(B), v)$. Estes pontos estão representados no gráfico de K pelo segmento de reta r_1 (Figura 63), tal que

$$r_1(v) = \left(x(B), v, \frac{6(x(B))}{(9(x(B))^4 + 1)^2(1 - (x(B))^3)} \right), \quad 0 < v < 2\pi.$$

Estes mesmos pontos, $(u, v) = (x(B), v)$, estão representados no gráfico do chapéu de Sherlock pela curva M (Figura 64) dada por

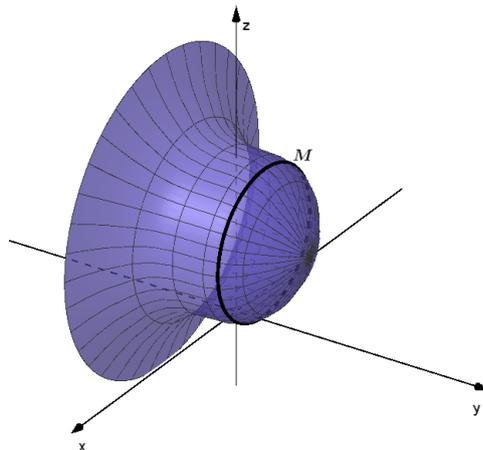
$$M(v) = ((1 - (x(B))^3) \cos v, x(B), (1 - (x(B))^3) \sin v + 1), \quad 0 < v < 2\pi.$$

Figura 63 – Pontos de Máximo no Gráfico da Curvatura Gaussiana do Chapéu de Scherlock



Fonte: Autor.

Figura 64 – Gráfico dos Pontos do Chapéu de Scherlock onde a Curvatura Gaussiana é Máxima



Fonte: Autor.

Analogamente, no GeoGebra determinamos o valor de k'' nos pontos $x(A)$ e $x(C)$ onde encontramos

$$k''(x(A)) \approx 46.33274 > 0,$$

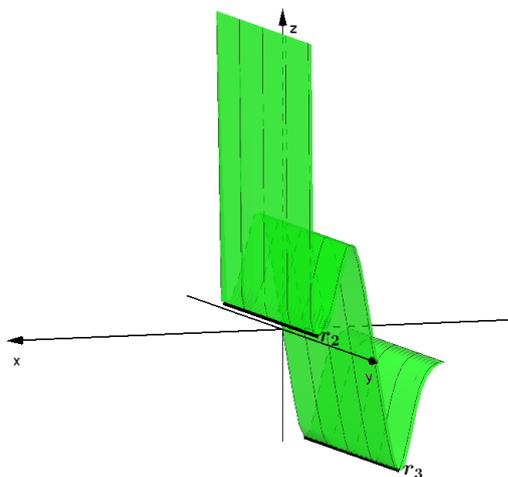
$$k''(x(C)) \approx 24.1232 > 0,$$

e, portanto, os pontos $u = x(A)$ e $u = x(C)$ são pontos de mínimo local. Assim, a curvatura Gaussiana K do chapéu de Scherlock é mínima nos pontos $(u, v) = (x(A), v)$ e $(u, v) = (x(C), v)$. Estes pontos estão representados no gráfico de K pelos segmentos de reta r_2 e r_3 (Figura 65), onde

$$r_2(v) = \left(x(C), v, \frac{6(x(C))}{(9(x(C))^4 + 1)^2(1 - (x(C))^3)} \right), \quad 0 < v < 2\pi,$$

$$r_3(v) = \left(x(A), v, \frac{6(x(A))}{(9(x(A))^4 + 1)^2(1 - (x(A))^3)} \right), \quad 0 < v < 2\pi.$$

Figura 65 – Pontos de Mínimo no Gráfico da Curvatura Gaussiana do Chapéu de Sherlock



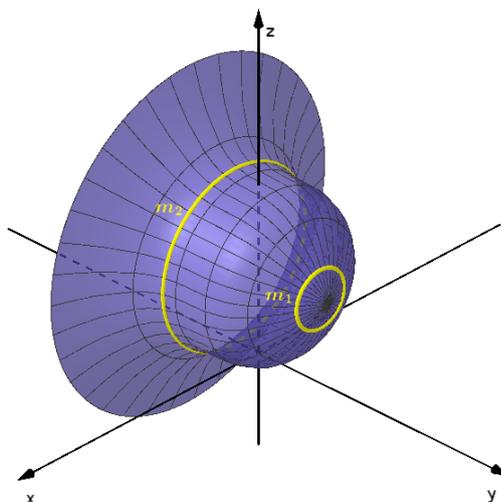
Fonte: Autor.

Estes mesmos pontos, $(u, v) = (x(A), v)$ e $(u, v) = (x(C), v)$, estão representados no gráfico do chapéu de Sherlock pelas curvas m_1 e m_2 (Figura 66) dadas por

$$m_1(v) = ((1 - (x(C))^3) \cos v, x(C), (1 - (x(C))^3) \sin v + 1), \quad 0 < v < 2\pi,$$

$$m_2(v) = ((1 - (x(A))^3) \cos v, x(A), (1 - (x(A))^3) \sin v + 1), \quad 0 < v < 2\pi.$$

Figura 66 – Gráfico dos Pontos do Chapéu de Sherlock onde a Curvatura Gaussiana é Mínima



Fonte: Autor.

Portanto, em resumo, concluímos que a curvatura Gaussiana do chapéu de Sherlock é negativa na região S_1 dada por

$$S_1(u, v) = ((1 - u^3) \cos v, u, (1 - u^3) \sin v + 1), \quad -1 < u < 0, \quad 0 < v < 2\pi,$$

é positiva na região S_2 dada por

$$S_2(u, v) = ((1 - u^3) \cos v, u, (1 - u^3) \sin v + 1), \quad 0 < u < 1, \quad 0 < v < 2\pi,$$

é nula na curva n dada por

$$n(v) = (\cos v, 0, \sin v + 1), \quad 0 < v < 2\pi,$$

é máxima local na curva M dada por

$$M(v) = ((1 - (x(B))^3) \cos v, x(B), (1 - (x(B))^3) \sin v + 1), \quad 0 < v < 2\pi,$$

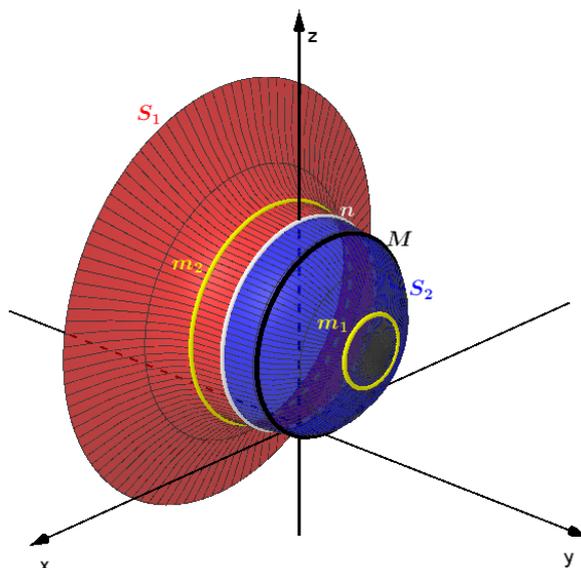
e por fim, mínima local nas curvas m_1 e m_2 dadas por

$$m_1(v) = ((1 - (x(C))^3) \cos v, x(C), (1 - (x(C))^3) \sin v + 1), \quad 0 < v < 2\pi,$$

$$m_2(v) = ((1 - (x(A))^3) \cos v, x(A), (1 - (x(A))^3) \sin v + 1), \quad 0 < v < 2\pi,$$

representadas na Figura 67.

Figura 67 – Análise Gráfica da Curvatura Gaussiana do Chapéu de Scherlock



Fonte: Autor.

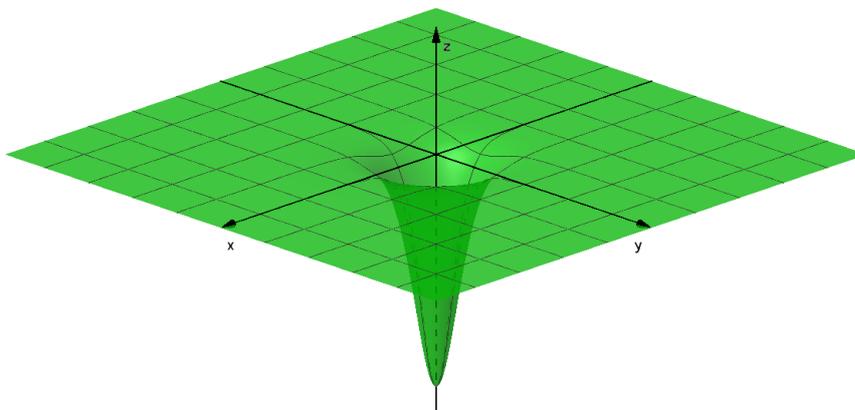
3.3.5 Superfície de Enneper

Exemplo 3.3.5. Do Exemplo 2.13.1 temos que a função curvatura K da superfície de Enneper é a função $K : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$K(u, v) = -\frac{4}{(1 + u^2 + v^2)^4}$$

e cujo gráfico de K é representado na Figura 68.

Figura 68 – Gráfico da Curvatura Gaussiana da Superfície de Enneper



Fonte: Autor.

(i) *Análise dos pontos onde a curvatura Gaussiana se anula*

Note que para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ temos

$$K(u, v) = -\frac{4}{(1 + u^2 + v^2)^4} \neq 0.$$

Logo, a curvatura Gaussiana da superfície de Enneper nunca se anula.

(ii) *Análise dos pontos onde a curvatura Gaussiana é positiva ou negativa*

Veja que para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ temos

$$K(u, v) = -\frac{4}{(1 + u^2 + v^2)^4} < 0.$$

Logo, a curvatura Gaussiana da superfície de Enneper é sempre negativa.

(iii) *Análise dos pontos de máximo e mínimo da curvatura Gaussiana*

Para fazer esta análise primeiramente devemos encontrar os candidatos a máximo e mínimo local, que são os pontos críticos da superfície K . Para isto calcularemos o vetor gradiente

$$\nabla K(u, v) = (K_u, K_v)$$

e o igualaremos ao vetor nulo $(0, 0)$.

Calculemos então as derivadas parciais K_u e K_v e em seguida igualemos estas expressões a 0 (zero). Temos que

$$\begin{aligned} K_u &= -\left(\frac{-4 \cdot 4(1 + u^2 + v^2)^3 \cdot 2u}{((1 + u^2 + v^2)^4)^2}\right) \\ &= \frac{32u(1 + u^2 + v^2)^3}{(1 + u^2 + v^2)^8} \\ &= \frac{32u}{(1 + u^2 + v^2)^5}. \end{aligned}$$

Fazendo $K_u = 0$ temos

$$\frac{32u}{(1 + u^2 + v^2)^5} = 0 \Rightarrow 32u = 0 \Rightarrow u = 0.$$

Analogamente encontramos

$$K_v = \frac{32v}{(1 + u^2 + v^2)^5}$$

e, se $K_v = 0$ então $v = 0$.

Logo, o ponto $(u, v) = (0, 0)$ é o único ponto crítico, e, portanto, o único candidato a extremante local. Para verificar se o ponto $(u, v) = (0, 0)$ é um extremante local calcularemos o hessiano $H(u, v)$ no ponto $(0, 0)$, onde

$$H(u, v) = \begin{vmatrix} K_{uu}(u, v) & K_{uv}(u, v) \\ K_{uv}(u, v) & K_{vv}(u, v) \end{vmatrix},$$

isto é,

$$H(u, v) = K_{uu}(u, v) \cdot K_{vv}(u, v) - (K_{uv}(u, v))^2.$$

Calculemos então as derivadas parciais de segunda ordem K_{uu} , K_{uv} e K_{vv} . Temos que

$$\begin{aligned} K_{uu} &= \frac{32 \cdot (1 + u^2 + v^2)^5 - 32u \cdot 5(1 + u^2 + v^2)^4 \cdot 2u}{((1 + u^2 + v^2)^5)^2} \\ &= \frac{32(1 + u^2 + v^2)^5 - 320u^2(1 + u^2 + v^2)^4}{(1 + u^2 + v^2)^{10}} \\ &= \frac{(1 + u^2 + v^2)^4(32(1 + u^2 + v^2) - 320u^2)}{(1 + u^2 + v^2)^{10}} \\ &= \frac{32(1 + u^2 + v^2) - 320u^2}{(1 + u^2 + v^2)^6} \\ &= \frac{32 + 32u^2 + 32v^2 - 320u^2}{(1 + u^2 + v^2)^6} \\ &= \frac{32 + 32v^2 - 288u^2}{(1 + u^2 + v^2)^6}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{uv} &= \frac{-32u \cdot 5(1 + u^2 + v^2)^4 \cdot 2v}{((1 + u^2 + v^2)^5)^2} \\ &= -\frac{320uv(1 + u^2 + v^2)^4}{(1 + u^2 + v^2)^{10}} \\ &= -\frac{320uv}{(1 + u^2 + v^2)^6}. \end{aligned}$$

Analogamente encontramos

$$K_{vv} = \frac{32 + 32u^2 - 288v^2}{(1 + u^2 + v^2)^6}.$$

Assim, substituindo K_{uu} , K_{uv} e K_{vv} em H temos

$$\begin{aligned} H(u, v) &= \frac{32 + 32v^2 - 288u^2}{(1 + u^2 + v^2)^6} \cdot \frac{32 + 32u^2 - 288v^2}{(1 + u^2 + v^2)^6} - \left(-\frac{320uv}{(1 + u^2 + v^2)^6} \right)^2 \\ &= \frac{(32 + 32v^2 - 288u^2)(32 + 32u^2 - 288v^2)}{(1 + u^2 + v^2)^{12}} - \frac{102400u^2v^2}{(1 + u^2 + v^2)^{12}}. \end{aligned}$$

Calculando H no ponto $(u, v) = (0, 0)$ temos

$$H(0, 0) = \frac{32 \cdot 32}{(1)^{12}} - 0 = 1024.$$

Logo, como $H(0, 0) > 0$, então o ponto $(0, 0)$ é um extremante local. Resta verificar se este extremante é máximo ou mínimo local. Para isto faremos o teste da derivada parcial de segunda ordem. Temos que

$$K_{uu}(0, 0) = \frac{32}{(1)^6} = 32.$$

Logo, como $K_{uu}(0, 0) > 0$ então o ponto $(0, 0)$ é um ponto de mínimo local de K . É possível constatar que o ponto $(0, 0)$ é um ponto de mínimo global, pois

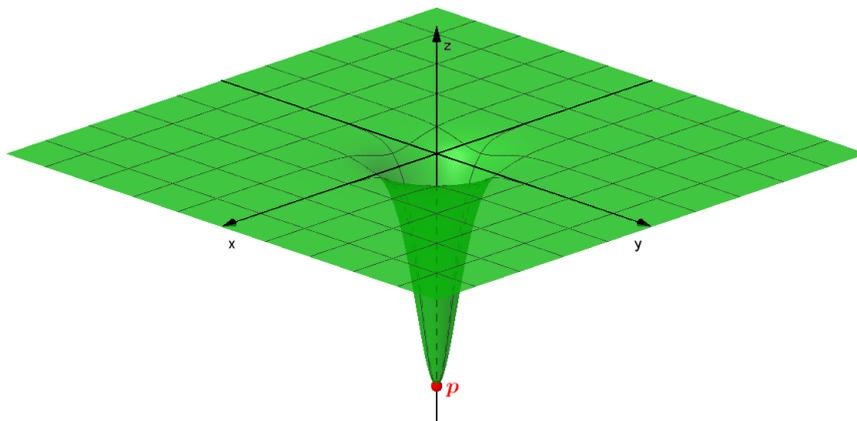
$$K(0, 0) = -4 \leq -\frac{4}{(1 + u^2 + v^2)^4} = K(u, v)$$

para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Portanto, o ponto $(u, v) = (0, 0)$ é um ponto de mínimo global. Assim, a curvatura Gaussiana K da superfície de Enneper é mínima no ponto $(u, v) = (0, 0)$. Este ponto está representado no gráfico de K pelo ponto p (Figura 69) dado por

$$p = (0, 0, -4).$$

Figura 69 – Ponto de Mínimo no Gráfico da Curvatura Gaussiana da Superfície de Enneper

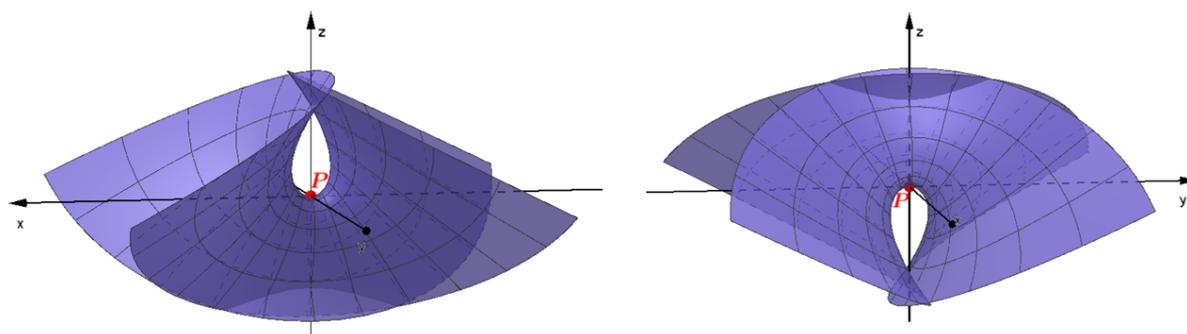


Fonte: Autor.

Este mesmo ponto, $(u, v) = (0, 0)$, está representado no gráfico da superfície de Enneper pelo ponto P (Figura 70) dada por

$$P = (0, 0, 0)$$

Figura 70 – Gráfico do Ponto da Superfície de Enneper onde a Curvatura Gaussiana é Mínima



Fonte: Autor.

Portanto, em resumo, concluímos que a curvatura Gaussiana da superfície de Enneper é sempre negativa e é mínima global no ponto $P = (0, 0, 0)$ da superfície cujo valor é $K_{(0,0)} = -4$.

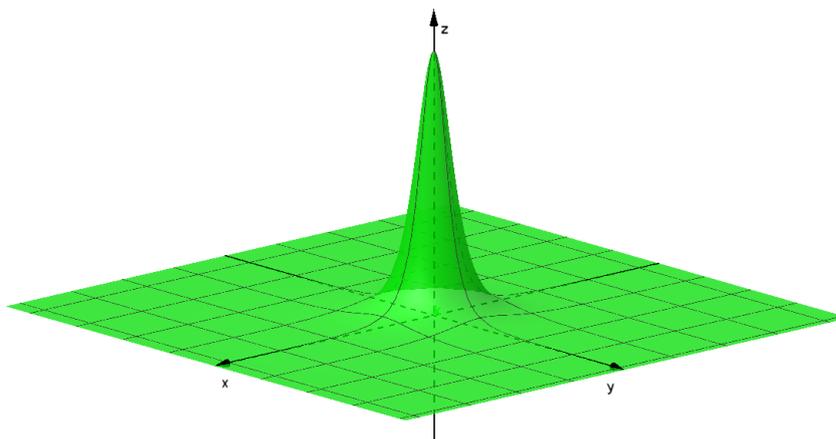
3.3.6 Parabolóide Elíptico

Exemplo 3.3.6. Do Exemplo 2.15.1 temos que a função curvatura K do parabolóide elíptico é a função $K : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$K(u, v) = \frac{4}{a^2 b^2 \left(\frac{4u^2}{a^4} + \frac{4v^2}{b^4} + 1 \right)^2},$$

e cujo gráfico de K é representado na Figura 71.

Figura 71 – Gráfico da Curvatura Gaussiana do Parabolóide Elíptico



Fonte: Autor.

(i) *Análise dos pontos onde a curvatura Gaussiana se anula*

Note que para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, com $a, b \in \mathbb{R}^*$, temos

$$K(u, v) = \frac{4}{a^2 b^2 \left(\frac{4u^2}{a^4} + \frac{4v^2}{b^4} + 1 \right)^2} \neq 0.$$

Logo, a curvatura Gaussiana do parabolóide elíptico nunca se anula.

(ii) *Análise dos pontos onde a curvatura Gaussiana é positiva ou negativa*

Veja que para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, com $a, b \in \mathbb{R}^*$, temos

$$K(u, v) = \frac{4}{a^2 b^2 \left(\frac{4u^2}{a^4} + \frac{4v^2}{b^4} + 1 \right)^2} > 0.$$

Logo, a curvatura Gaussiana do parabolóide elíptico é sempre positiva.

(iii) *Análise dos pontos de máximo e mínimo da curvatura Gaussiana*

Para fazer esta análise primeiramente devemos encontrar os candidatos a máximo e mínimo local, que são os pontos críticos da superfície K . Para isto calcularemos o vetor gradiente

$$\nabla K(u, v) = (K_u, K_v)$$

e o igualaremos ao vetor nulo $(0, 0)$.

Temos que

$$K(u, v) = \frac{4}{a^2 b^2 \left(\frac{4u^2}{a^4} + \frac{4v^2}{b^4} + 1 \right)^2}.$$

Fazendo $A = \frac{4u^2}{a^4} + \frac{4v^2}{b^4} + 1$, podemos reescrever K da seguinte forma

$$K(u, v) = \frac{4}{a^2 b^2} \cdot \frac{1}{A^2}.$$

Calculamos então as derivadas parciais K_u e K_v e em seguida igualemos estas expressões à 0 (zero). Temos que

$$\begin{aligned} K_u &= \frac{4}{a^2 b^2} \cdot \left(\frac{-1 \cdot 2A \cdot \frac{8u}{a^4}}{(A^2)^2} \right), \\ &= \frac{4}{a^2 b^2} \cdot \left(\frac{-16uA}{a^4 A^4} \right) \\ &= \frac{-64uA}{a^6 b^2 A^4} \end{aligned}$$

$$= -\frac{64u}{a^6b^2A^3}.$$

Fazendo $K_u = 0$ temos

$$-\frac{64u}{a^6b^2A^3} = 0 \Rightarrow -64u = 0 \Rightarrow u = 0.$$

Analogamente encontramos

$$K_v = -\frac{64v}{a^2b^6A^3}$$

e se $K_v = 0$ então $v = 0$.

Logo, o ponto $(u, v) = (0, 0)$ é o único ponto crítico, e, portanto, o único candidato a extremante local. Para verificar se o ponto $(u, v) = (0, 0)$ é um extremante local calcularemos o hessiano $H(u, v)$ no ponto $(0, 0)$, onde

$$H(u, v) = K_{uu}(u, v) \cdot K_{vv}(u, v) - (K_{uv}(u, v))^2.$$

Calculamos então as derivadas parciais de segunda ordem K_{uu} , K_{uv} e K_{vv} . Temos que

$$\begin{aligned} K_{uu} &= -\frac{64}{a^6b^2} \cdot \left(\frac{1 \cdot A^3 - u \cdot 3A^2 \cdot \frac{8u}{a^4}}{(A^3)^2} \right) \\ &= -\frac{64}{a^6b^2} \cdot \left(\frac{A^3 - 24u^2A^2}{a^4A^6} \right) \\ &= -\frac{64}{a^6b^2} \cdot \left(\frac{A^2(A - 24u^2)}{a^4A^6} \right) \\ &= -\frac{64}{a^6b^2} \cdot \left(\frac{A - 24u^2}{a^4A^4} \right) \\ &= -\frac{64A - 1536u^2}{a^{10}b^2A^4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{uv} &= -\frac{64u}{a^6b^2} \cdot \left(\frac{-1 \cdot 3A^2 \cdot \frac{8v}{b^4}}{(A^3)^2} \right) \\ &= -\frac{64u}{a^6b^2} \cdot \left(\frac{-24vA^2}{b^4A^6} \right) \\ &= -\frac{64u}{a^6b^2} \cdot \left(\frac{-24v}{b^4A^4} \right) \\ &= \frac{1536uv}{a^6b^6A^4}. \end{aligned}$$

Analogamente encontramos

$$K_{vv} = -\frac{64A - 1536v^2}{a^2b^{10}A^4}.$$

Assim, substituindo K_{uu} , K_{uv} e K_{vv} em H temos

$$\begin{aligned} H(u, v) &= \left(-\frac{64A - 1536u^2}{a^{10}b^2A^4} \right) \cdot \left(-\frac{64A - 1536v^2}{a^2b^{10}A^4} \right) - \left(\frac{1536uv}{a^6b^6A^4} \right)^2 \\ &= \frac{(64A - 1536u^2)(64A - 1536v^2)}{a^{12}b^{12}A^8} - \frac{(1536uv)^2}{a^{12}b^{12}A^8}. \end{aligned}$$

Calculando H no ponto $(u, v) = (0, 0)$ temos

$$H(0, 0) = \frac{64 \cdot 64}{a^{12}b^{12}} - 0 = \frac{4096}{a^{12}b^{12}},$$

uma vez que para $(u, v) = (0, 0)$ temos que $A = 1$.

Logo, como $H(0, 0) > 0$, então o ponto $(0, 0)$ é um extremante local. Resta verificar se este extremante é máximo ou mínimo local. Para isto faremos o teste da derivada parcial de segunda ordem. Temos que

$$K_{uu}(0, 0) = -\frac{64}{a^{10}b^2}.$$

Logo, como $K_{uu}(0, 0) < 0$ então o ponto $(0, 0)$ é um ponto de máximo local de K . É possível constatar que o ponto $(0, 0)$ é um ponto de máximo global, pois

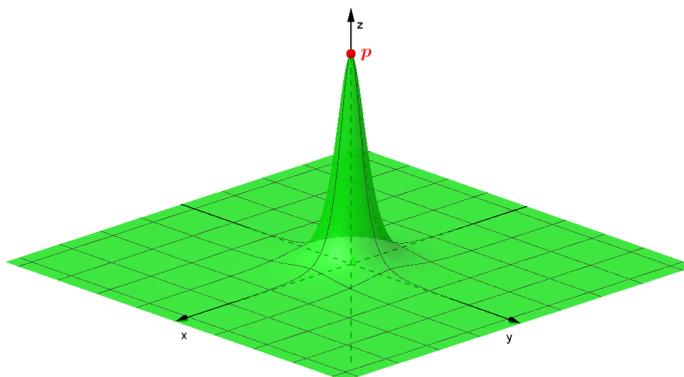
$$K(0, 0) = \frac{4}{a^2b^2} \geq \frac{4}{a^2b^2A^2} = K(u, v),$$

para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, pois $A \geq 1$ para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Portanto, o ponto $(u, v) = (0, 0)$ é um ponto de máximo global. Assim, a curvatura Gaussiana K do parabolóide Elíptico é máxima no ponto $(u, v) = (0, 0)$. Este ponto está representado no gráfico de K pelo ponto p (Figura 72) dado por

$$p = \left(0, 0, \frac{4}{a^2b^2} \right).$$

Figura 72 – Ponto de Máximo no Gráfico da Curvatura Gaussiana do Parabolóide Elíptico

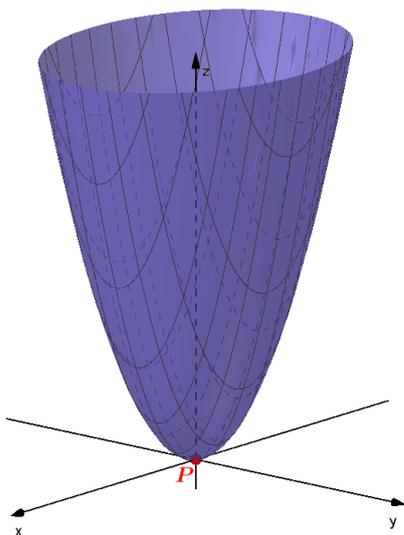


Fonte: Autor.

Este mesmo ponto, $(u, v) = (0, 0)$, está representado no gráfico do parabolóide elíptico pelo ponto P (Figura 73), onde

$$P = (0, 0, 0).$$

Figura 73 – Gráfico do Ponto do Parabolóide Elíptico onde a Curvatura Gaussiana é Máxima



Fonte: Autor.

Portanto, em resumo, concluímos que a curvatura Gaussiana do parabolóide elíptico é sempre positiva e é máxima global no ponto $P = (0, 0, 0)$ da superfície cujo valor é $K_{(0,0)} = \frac{4}{a^2b^2}$.

3.3.7 Parabolóide Hiperbólico

Exemplo 3.3.7. Do Exemplo 2.16.1 temos que a função curvatura K do parabolóide hiperbólico é a função $K : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$K(u, v) = -\frac{4}{a^2b^2 \left(\frac{4u^2}{a^4} + \frac{4v^2}{b^4} + 1 \right)^2}$$

e cujo gráfico de K é representado na Figura 74.

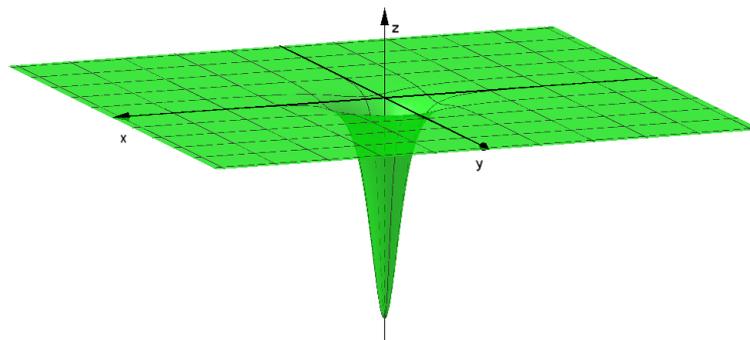
(i) Análise dos pontos onde a curvatura Gaussiana se anula

Note que para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, com $a, b \in \mathbb{R}^*$, temos

$$K(u, v) = -\frac{4}{a^2b^2 \left(\frac{4u^2}{a^4} + \frac{4v^2}{b^4} + 1 \right)^2} \neq 0.$$

Logo, a curvatura Gaussiana do parabolóide hiperbólico nunca se anula.

Figura 74 – Gráfico da Curvatura Gaussiana do Parabolóide Hiperbólico



Fonte: Autor.

(ii) *Análise dos pontos onde a curvatura Gaussiana é positiva ou negativa*

Veja que para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, com $a, b \in \mathbb{R}^*$, temos

$$K(u, v) = -\frac{4}{a^2 b^2 \left(\frac{4u^2}{a^4} + \frac{4v^2}{b^4} + 1 \right)^2} < 0.$$

Logo, a curvatura Gaussiana do parabolóide hiperbólico é sempre negativa.

(iii) *Análise dos pontos de máximo e mínimo da curvatura Gaussiana*

Para fazer esta análise primeiramente devemos encontrar os candidatos a máximo e mínimo local, que são os pontos críticos da superfície K . Para isto calcularemos o vetor gradiente

$$\nabla K(u, v) = (K_u, K_v)$$

e o igualaremos ao vetor nulo $(0, 0)$.

Temos que

$$K(u, v) = -\frac{4}{a^2 b^2 \left(\frac{4u^2}{a^4} + \frac{4v^2}{b^4} + 1 \right)^2}.$$

Fazendo $A = \frac{4u^2}{a^4} + \frac{4v^2}{b^4} + 1$, podemos reescrever K da seguinte forma

$$K(u, v) = -\frac{4}{a^2 b^2} \cdot \frac{1}{A^2}.$$

Calculamos então as derivadas parciais K_u e K_v e em seguida igualemos estas expressões a 0 (zero). Temos que

$$K_u = -\frac{4}{a^2 b^2} \cdot \left(\frac{-1 \cdot 2A \cdot \frac{8u}{a^4}}{(A^2)^2} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{4}{a^2b^2} \cdot \left(\frac{-16uA}{a^4A^4} \right) \\
 &= \frac{64uA}{a^6b^2A^4} \\
 &= \frac{64u}{a^6b^2A^3}.
 \end{aligned}$$

Fazendo $K_u = 0$ temos

$$\frac{64u}{a^6b^2A^3} = 0 \Rightarrow 64u = 0 \Rightarrow u = 0.$$

Analogamente encontramos

$$K_v = \frac{64v}{a^2b^6A^3}$$

e se $K_v = 0$ então $v = 0$.

Logo, o ponto $(u, v) = (0, 0)$ é o único ponto crítico, e, portanto, o único candidato a extremante local. Para verificar se o ponto $(u, v) = (0, 0)$ é um extremante local calcularemos o hessiano $H(u, v)$ no ponto $(0, 0)$, onde

$$H(u, v) = K_{uu}(u, v) \cdot K_{vv}(u, v) - (K_{uv}(u, v))^2.$$

Calculemos então as derivadas parciais de segunda ordem K_{uu} , K_{uv} e K_{vv} . Temos que

$$\begin{aligned}
 K_{uu} &= \frac{64}{a^6b^2} \cdot \left(\frac{1 \cdot A^3 - u \cdot 3A^2 \cdot \frac{8u}{a^4}}{(A^3)^2} \right) \\
 &= \frac{64}{a^6b^2} \cdot \left(\frac{A^3 - 24u^2A^2}{a^4A^6} \right) \\
 &= \frac{64}{a^6b^2} \cdot \left(\frac{A^2(A - 24u^2)}{a^4A^6} \right) \\
 &= \frac{64}{a^6b^2} \cdot \left(\frac{A - 24u^2}{a^4A^4} \right) \\
 &= \frac{64A - 1536u^2}{a^{10}b^2A^4}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{uv} &= \frac{64u}{a^6b^2} \cdot \left(\frac{-1 \cdot 3A^2 \cdot \frac{8v}{b^4}}{(A^3)^2} \right) \\
 &= \frac{64u}{a^6b^2} \cdot \left(\frac{-24vA^2}{b^4A^6} \right) \\
 &= \frac{64u}{a^6b^2} \cdot \left(\frac{-24v}{b^4A^4} \right) \\
 &= -\frac{1536uv}{a^6b^6A^4}.
 \end{aligned}$$

Analogamente encontramos

$$K_{vv} = \frac{64A - 1536v^2}{a^2b^{10}A^4}.$$

Assim, substituindo K_{uu} , K_{uv} e K_{vv} em H temos

$$\begin{aligned} H(u, v) &= \left(\frac{64A - 1536u^2}{a^{10}b^2A^4} \right) \cdot \left(\frac{64A - 1536v^2}{a^2b^{10}A^4} \right) - \left(-\frac{1536uv}{a^6b^6A^4} \right)^2 \\ &= \frac{(64A - 1536u^2)(64A - 1536v^2)}{a^{12}b^{12}A^8} - \frac{(1536uv)^2}{a^{12}b^{12}A^8}. \end{aligned}$$

Calculando H no ponto $(u, v) = (0, 0)$ temos

$$H(0, 0) = \frac{64 \cdot 64}{a^{12}b^{12}} - 0 = \frac{4096}{a^{12}b^{12}},$$

uma vez que para $(u, v) = (0, 0)$ temos que $A = 1$.

Logo, como $H(0, 0) > 0$, então o ponto $(0, 0)$ é um extremante local. Resta verificar se este extremante é máximo ou mínimo local. Para isto faremos o teste da derivada parcial de segunda ordem. Temos que

$$K_{uu}(0, 0) = \frac{64}{a^{10}b^2}.$$

Logo, como $K_{uu}(0, 0) > 0$ então o ponto $(0, 0)$ é um ponto de mínimo local de K . É possível constatar que o ponto $(0, 0)$ é um ponto de mínimo global, pois

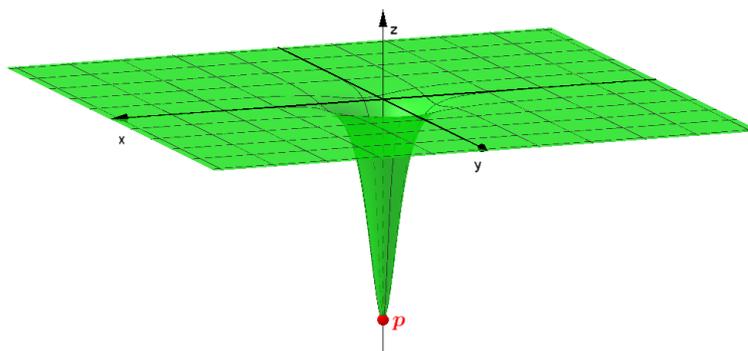
$$K(0, 0) = -\frac{4}{a^2b^2} \leq -\frac{4}{a^2b^2A^2} = K(u, v),$$

para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, pois $A \geq 1$ para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Portanto, o ponto $(u, v) = (0, 0)$ é um ponto de mínimo global. Assim, a curvatura Gaussiana K do parabolóide hiperbólico é mínima no ponto $(u, v) = (0, 0)$. Este ponto está representado no gráfico de K pelo ponto p (Figura 75) dado por

$$p = \left(0, 0, -\frac{4}{a^2b^2} \right).$$

Figura 75 – Ponto de Mínimo no Gráfico da Curvatura Gaussiana do Parabolóide Hiperbólico

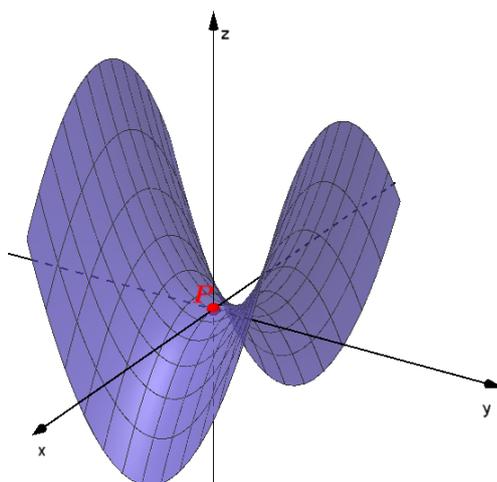


Fonte: Autor.

Este mesmo ponto, $(u, v) = (0, 0)$, está representado no gráfico do parabolóide hiperbólico pelo ponto P (Figura 76) dado por

$$P = (0, 0, 0).$$

Figura 76 – Gráfico do Ponto do Parabolóide Hiperbólico onde a Curvatura Gaussiana é Mínima



Fonte: Autor.

Portanto, em resumo, concluímos que a curvatura Gaussiana do parabolóide hiperbólico é sempre negativa e é mínima global no ponto $P = (0, 0, 0)$ da superfície cujo valor é $K_{(0,0)} = -\frac{4}{a^2b^2}$.

Observação 3.3.2. Assim como no toro, as parametrizações do elipsóide, do hiperbolóide elíptico de uma folha e do hiperbolóide elíptico de duas folhas, não as cobrem totalmente. No entanto, para cobri-las totalmente, basta tomar uma outra vizinhança coordenada para as mesmas respectivas parametrizações, assim como feito com o toro na Observação 3.3.1.

3.3.8 Elipsóide

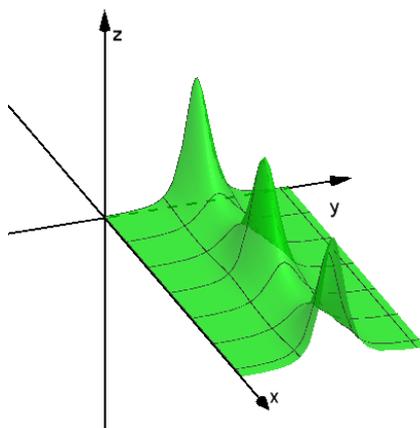
Exemplo 3.3.8. Do Exemplo 2.8.1 temos que a função curvatura K do elipsóide é a função $K : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$K(u, v) = \frac{(abc)^2}{[(bc \sen v \cos u)^2 + (ac \sen v \sen u)^2 + (ab \cos v)^2]^2},$$

onde $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < 2\pi \text{ e } 0 < v < \pi\}$.

Para este exemplo consideraremos o elipsóide cujas constantes $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ satisfazem a condição $a > b > c$. O gráfico da curvatura Gaussiana K deste elipsóide está representado na Figura 77.

Figura 77 – Gráfico da Curvatura Gaussiana do Elipsóide



Fonte: Autor.

(i) *Análise dos pontos onde a curvatura Gaussiana se anula*

Note que para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, com $a, b, c \in \mathbb{R}^$, temos*

$$K(u, v) = \frac{(abc)^2}{[(bc \operatorname{sen} v \cos u)^2 + (ac \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u)^2 + (ab \cos v)^2]^2} \neq 0.$$

Logo, a curvatura Gaussiana do elipsóide nunca se anula.

(ii) *Análise dos pontos onde a curvatura Gaussiana é positiva ou negativa*

Veja que para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, com $a, b, c \in \mathbb{R}^$, temos*

$$K(u, v) = \frac{(abc)^2}{[(bc \operatorname{sen} v \cos u)^2 + (ac \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u)^2 + (ab \cos v)^2]^2} > 0.$$

Logo, a curvatura Gaussiana do elipsóide é sempre positiva.

(iii) *Análise dos pontos de máximo e mínimo da curvatura Gaussiana*

Para fazer esta análise primeiramente devemos encontrar os candidatos a máximo e mínimo local, que são os pontos críticos da superfície K . Para isto calcularemos o vetor gradiente

$$\nabla K(u, v) = (K_u, K_v)$$

e o igualaremos ao vetor nulo $(0, 0)$.

Temos que

$$K(u, v) = \frac{(abc)^2}{[(bc \operatorname{sen} v \cos u)^2 + (ac \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u)^2 + (ab \cos v)^2]^2}.$$

Fazendo $A = bc \operatorname{sen} v \cos u$, temos que

$$A_u = -bc \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, \quad A_v = bc \cos v \cos u.$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} B &= ac \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, & B_u &= ac \operatorname{sen} v \cos u, & B_v &= ac \cos v \operatorname{sen} u, \\ C &= ab \cos v, & C_u &= 0, & C_v &= -ab \operatorname{sen} v. \end{aligned}$$

Assim, podemos reescrever K da seguinte forma

$$K(u, v) = (abc)^2 \cdot \frac{1}{(A^2 + B^2 + C^2)^2}.$$

Calculamos então as derivadas parciais K_u e K_v e em seguida igualemos estas expressões a 0 (zero). Temos que

$$\begin{aligned} K_u &= (abc)^2 \cdot \left(\frac{-1 \cdot 2(A^2 + B^2 + C^2) \cdot (2AA_u + 2BB_u + 2CC_u)}{[(A^2 + B^2 + C^2)^2]^2} \right) \\ &= (abc)^2 \cdot \left(\frac{-2(A^2 + B^2 + C^2) \cdot 2(AA_u + BB_u + CC_u)}{(A^2 + B^2 + C^2)^4} \right) \\ &= (abc)^2 \cdot \left(\frac{-4(AA_u + BB_u + CC_u)}{(A^2 + B^2 + C^2)^3} \right) \\ &= \frac{-4(abc)^2(AA_u + BB_u + CC_u)}{(A^2 + B^2 + C^2)^3}. \end{aligned}$$

Fazendo $K_u = 0$ temos

$$\frac{-4(abc)^2(AA_u + BB_u + CC_u)}{(A^2 + B^2 + C^2)^3} = 0,$$

$$-4(abc)^2(AA_u + BB_u + CC_u) = 0,$$

$$AA_u + BB_u + CC_u = 0,$$

$$(bc \operatorname{sen} v \cos u)(-bc \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u) + (ac \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u)(ac \operatorname{sen} v \cos u) + (ab \cos v) \cdot 0 = 0,$$

$$-b^2c^2 \operatorname{sen}^2 v \cos u \operatorname{sen} u + a^2c^2 \operatorname{sen}^2 v \operatorname{sen} u \cos u = 0,$$

isto é,

$$\operatorname{sen}^2 v \cos u \operatorname{sen} u(-b^2c^2 + a^2c^2) = 0. \quad (3.1)$$

Analogamente encontramos

$$K_v = \frac{-4(abc)^2(AA_v + BB_v + CC_v)}{(A^2 + B^2 + C^2)^3}.$$

Fazendo $K_v = 0$ temos

$$\frac{-4(abc)^2(AA_v + BB_v + CC_v)}{(A^2 + B^2 + C^2)^3} = 0,$$

$$-4(abc)^2(AA_v + BB_v + CC_v) = 0,$$

$$AA_v + BB_v + CC_v = 0,$$

$$(bc \operatorname{sen} v \cos u)(bc \cos v \cos u) + (ac \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u)(ac \cos v \operatorname{sen} u) + (ab \cos v)(-ab \operatorname{sen} v) = 0, \\ b^2 c^2 \operatorname{sen} v \cos^2 u \cos v + a^2 c^2 \operatorname{sen} v \operatorname{sen}^2 u \cos v - a^2 b^2 \cos v \operatorname{sen} v = 0,$$

isto é,

$$\operatorname{sen} v \cos v (b^2 c^2 \cos^2 u + a^2 c^2 \operatorname{sen}^2 u - a^2 b^2) = 0. \quad (3.2)$$

Assim, para encontrar os pontos críticos de K devemos resolver o sistema a seguir em u e v formado pelas Equações 3.1 e 3.2.

$$\begin{cases} \operatorname{sen}^2 v \cos u \operatorname{sen} u (-b^2 c^2 + a^2 c^2) = 0 & (3.1) \\ \operatorname{sen} v \cos v (b^2 c^2 \cos^2 u + a^2 c^2 \operatorname{sen}^2 u - a^2 b^2) = 0 & (3.2) \end{cases}.$$

Primeiramente determinaremos os valores de u e v que satisfazem a equação (3.1). Como $(-b^2 c^2 + a^2 c^2) \neq 0$, então os valores de u e v que satisfazem a equação (3.1) são tais que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 v = 0 &\Rightarrow v = 0 \text{ ou } v = \pi, \\ \cos u = 0 &\Rightarrow u = \frac{\pi}{2} \text{ ou } u = \frac{3\pi}{2}, \\ \operatorname{sen} u = 0 &\Rightarrow u = 0 \text{ ou } u = \pi \text{ ou } u = 2\pi. \end{aligned}$$

Analogamente, como $(b^2 c^2 \cos^2 u + a^2 c^2 \operatorname{sen}^2 u - a^2 b^2) \neq 0$, então os valores de u e v que satisfazem a equação (3.2) são tais que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} v = 0 &\Rightarrow v = 0 \text{ ou } v = \pi, \\ \cos v = 0 &\Rightarrow v = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Logo, os pontos $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (0, \pi/2)$, $P_3 = (0, \pi)$, $P_4 = (\pi/2, 0)$, $P_5 = (\pi/2, \pi/2)$, $P_6 = (\pi/2, \pi)$, $P_7 = (\pi, 0)$, $P_8 = (\pi, \pi/2)$, $P_9 = (\pi, \pi)$, $P_{10} = (3\pi/2, 0)$, $P_{11} = (3\pi/2, \pi/2)$, $P_{12} = (3\pi/2, \pi)$, $P_{13} = (2\pi, 0)$, $P_{14} = (2\pi, \pi/2)$ e $P_{15} = (2\pi, \pi)$ são os pontos críticos, e, portanto, os candidatos a extremantes locais. Para verificar se estes pontos são extremantes locais, calcularemos o hessiano $H(u, v)$ em cada um destes pontos, onde

$$H(u, v) = K_{uu}(u, v) \cdot K_{vv}(u, v) - (K_{uv}(u, v))^2.$$

Usando o software GeoGebra calculamos o hessiano em cada ponto crítico e obtemos

$$\begin{aligned} H_1(0, 0) = 0 &\Rightarrow \text{nada se pode afirmar sobre } P_1, \\ H_2(0, \pi/2) > 0 &\Rightarrow P_2 \text{ é um extremante local,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_3(0, \pi) &= 0 \Rightarrow \text{nada se pode afirmar sobre } P_3, \\
 H_4(\pi/2, 0) &= 0 \Rightarrow \text{nada se pode afirmar sobre } P_4, \\
 H_5(\pi/2, \pi/2) &< 0 \Rightarrow P_5 \text{ é um ponto de sela,} \\
 H_6(\pi/2, \pi) &= 0 \Rightarrow \text{nada se pode afirmar sobre } P_6, \\
 H_7(\pi, 0) &= 0 \Rightarrow \text{nada se pode afirmar sobre } P_7, \\
 H_8(\pi, \pi/2) &> 0 \Rightarrow P_8 \text{ é um extremante local,} \\
 H_9(\pi, \pi) &= 0 \Rightarrow \text{nada se pode afirmar sobre } P_9, \\
 H_{10}(3\pi/2, 0) &= 0 \Rightarrow \text{nada se pode afirmar sobre } P_{10}, \\
 H_{11}(3\pi/2, \pi/2) &< 0 \Rightarrow P_{11} \text{ é um ponto de sela,} \\
 H_{12}(3\pi/2, \pi) &= 0 \Rightarrow \text{nada se pode afirmar sobre } P_{12}, \\
 H_{13}(2\pi, 0) &= 0 \Rightarrow \text{nada se pode afirmar sobre } P_{13}, \\
 H_{14}(2\pi, \pi/2) &> 0 \Rightarrow P_{14} \text{ é um extremante local,} \\
 H_{15}(2\pi, \pi) &= 0 \Rightarrow \text{nada se pode afirmar sobre } P_{15}.
 \end{aligned}$$

Logo, os pontos $P_2 = (0, \pi/2)$, $P_8 = (\pi, \pi/2)$ e $P_{14} = (2\pi, \pi/2)$ são os únicos extremantes locais possíveis de verificar com esta ferramenta do cálculo. Como os pontos $P_2 = (0, \pi/2)$ e $P_{14} = (2\pi, \pi/2)$ são coincidentes na parametrização X do elipsóide, então a partir daqui analisaremos somente os pontos $P_2 = (0, \pi/2)$ e $P_8 = (\pi, \pi/2)$. Agora, vamos verificar se estes pontos extremantes são máximos ou mínimos locais. Para isto faremos o teste da derivada parcial de segunda ordem. Usando o software GeoGebra calculamos o valor de K_{uu} nos pontos $P_2 = (0, \pi/2)$ e $P_8 = (\pi, \pi/2)$ e obtemos

$$\begin{aligned}
 K_{uu}(0, \pi/2) &< 0 \Rightarrow \text{o ponto } P_2 \text{ é um ponto de máximo local,} \\
 K_{uu}(\pi, \pi/2) &< 0 \Rightarrow \text{o ponto } P_8 \text{ é um ponto de máximo local.}
 \end{aligned}$$

Podemos verificar que estes pontos, $P_2 = (0, \pi/2)$, $P_8 = (\pi, \pi/2)$ e $P_{14} = (2\pi, \pi/2)$, são pontos de máximo global. Para isto, calcularemos o valor de K em cada um dos pontos críticos e compararemos os valores. Temos que,

$$\begin{aligned}
 K(0, 0) &= \frac{c^2}{(ab)^2}, & K(0, \pi/2) &= \frac{a^2}{(bc)^2}, & K(0, \pi) &= \frac{c^2}{(ab)^2}, \\
 K(\pi/2, 0) &= \frac{c^2}{(ab)^2}, & K(\pi/2, \pi/2) &= \frac{a^2}{(ac)^2}, & K(\pi/2, \pi) &= \frac{c^2}{(ab)^2}, \\
 K(\pi, 0) &= \frac{c^2}{(ab)^2}, & K(\pi, \pi/2) &= \frac{a^2}{(bc)^2}, & K(\pi, \pi) &= \frac{c^2}{(ab)^2}, \\
 K(3\pi/2, 0) &= \frac{c^2}{(ab)^2}, & K(3\pi/2, \pi/2) &= \frac{a^2}{(ac)^2}, & K(3\pi/2, \pi) &= \frac{c^2}{(ab)^2}, \\
 K(2\pi, 0) &= \frac{c^2}{(ab)^2}, & K(2\pi, \pi/2) &= \frac{a^2}{(bc)^2}, & K(2\pi, \pi) &= \frac{c^2}{(ab)^2}.
 \end{aligned}$$

Como $a > b > c$, então $ac > bc$ e $ab > ac$, ou seja, $ab > ac > bc$. Daí, temos que

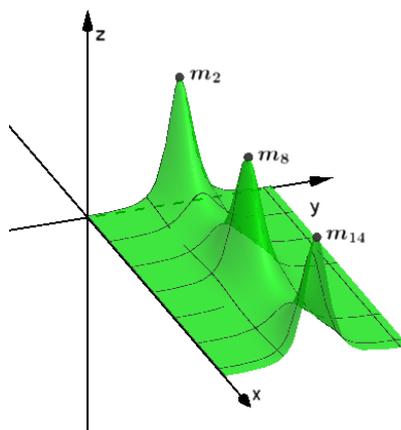
$$\frac{a^2}{(bc)^2} > \frac{c^2}{(bc)^2} \Rightarrow \frac{a^2}{(bc)^2} > \frac{c^2}{(ab)^2},$$

$$\frac{a^2}{(bc)^2} > \frac{b^2}{(bc)^2} \Rightarrow \frac{a^2}{(bc)^2} > \frac{b^2}{(ac)^2}.$$

Portanto, os pontos $P_2 = (0, \pi/2)$, $P_8 = (\pi, \pi/2)$ e $P_{14} = (2\pi, \pi/2)$ são pontos de máximo global. Assim, a curvatura Gaussiana K do elipsóide é máxima nos pontos $P_2 = (0, \pi/2)$, $P_8 = (\pi, \pi/2)$ e $P_{14} = (2\pi, \pi/2)$. Estes pontos estão representado no gráfico de K pelos pontos m_2, m_8 e m_{14} (Figura 78) dado por

$$m_2 = \left(0, \pi/2, \frac{a^2}{(bc)^2}\right), m_8 = \left(\pi, \pi/2, \frac{a^2}{(bc)^2}\right), m_{14} = \left(2\pi, \pi/2, \frac{a^2}{(bc)^2}\right).$$

Figura 78 – Pontos de Máximo no Gráfico da Curvatura Gaussiana do Elipsóide



Fonte: Autor.

Estes mesmos pontos, $P_2 = (0, \pi/2)$, $P_8 = (\pi, \pi/2)$ e $P_{14} = (2\pi, \pi/2)$, estão representados no gráfico do elipsóide pelos pontos M_2 e M_8 (Figura 79) dados por

$$M_2 = (a, 0, 0), M_8 = (-a, 0, 0).$$

Por outro lado, temos também que

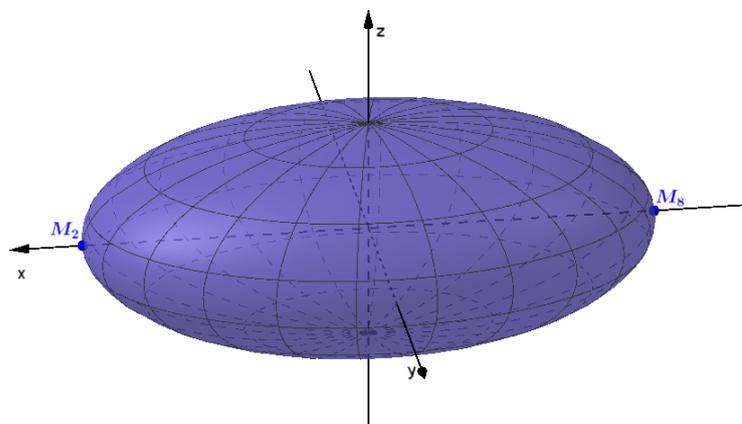
$$\frac{b^2}{(ac)^2} > \frac{c^2}{(ac)^2} \Rightarrow \frac{b^2}{(ac)^2} > \frac{c^2}{(ab)^2},$$

ou seja,

$$\frac{a^2}{(bc)^2} > \frac{b^2}{(ac)^2} > \frac{c^2}{(ab)^2}.$$

Isto significa que os pontos $P_1 = (0, 0)$, $P_3 = (0, \pi)$, $P_4 = (\pi/2, 0)$, $P_6 = (\pi/2, \pi)$, $P_7 = (\pi, 0)$, $P_9 = (\pi, \pi)$, $P_{10} = (3\pi/2, 0)$, $P_{12} = (3\pi/2, \pi)$, $P_{13} = (2\pi, 0)$ e $P_{15} = (2\pi, \pi)$ são pontos de mínimos globais. Estes pontos estão representado no gráfico de K pelos pontos $m_1, m_3, m_4, m_6, m_7, m_9, m_{10}, m_{12}, m_{13}$ e m_{15} (Figura 80) dados por

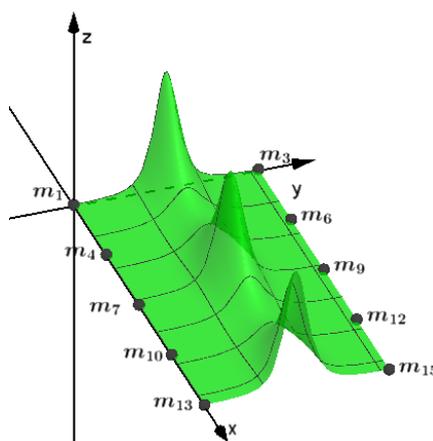
Figura 79 – Gráfico dos Pontos do Elipsóide onde a Curvatura Gaussiana é Máxima



Fonte: Autor.

$$\begin{aligned}
 m_1 &= \left(0, 0, \frac{c^2}{(ab)^2}\right), & m_3 &= \left(0, \pi, \frac{c^2}{(ab)^2}\right), & m_4 &= \left(\frac{\pi}{2}, 0, \frac{c^2}{(ab)^2}\right), \\
 m_6 &= \left(\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{c^2}{(ab)^2}\right), & m_7 &= \left(\pi, 0, \frac{c^2}{(ab)^2}\right), & m_9 &= \left(\pi, \pi, \frac{c^2}{(ab)^2}\right), \\
 m_{10} &= \left(\frac{3\pi}{2}, 0, \frac{c^2}{(ab)^2}\right), & m_{12} &= \left(\frac{3\pi}{2}, \pi, \frac{c^2}{(ab)^2}\right), & m_{13} &= \left(2\pi, 0, \frac{c^2}{(ab)^2}\right), \\
 & & m_{15} &= \left(2\pi, \pi, \frac{c^2}{(ab)^2}\right).
 \end{aligned}$$

Figura 80 – Pontos de Mínimo no Gráfico da Curvatura Gaussiana do Elipsóide



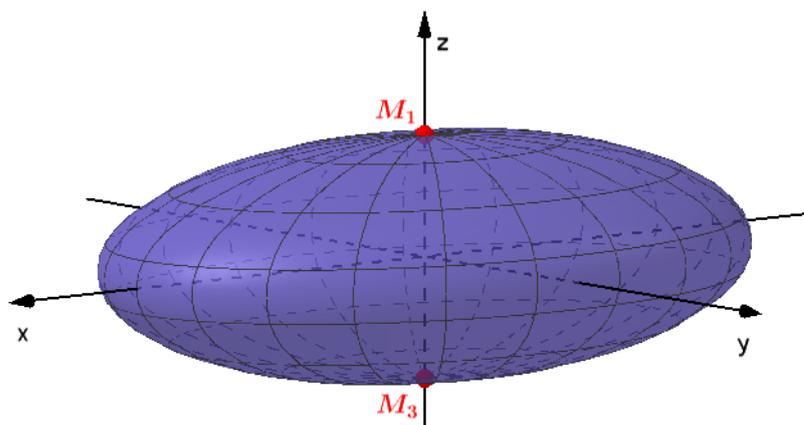
Fonte: Autor.

Estes mesmos pontos, $P_1 = (0, 0)$, $P_3 = (0, \pi)$, $P_4 = (\pi/2, 0)$, $P_6 = (\pi/2, \pi)$, $P_7 = (\pi, 0)$, $P_9 = (\pi, \pi)$, $P_{10} = (3\pi/2, 0)$, $P_{12} = (3\pi/2, \pi)$, $P_{13} = (2\pi, 0)$ e $P_{15} = (2\pi, \pi)$, estão representados no gráfico do elipsóide pelos pontos M_1 e M_3 (Figura 81) dados por

$$M_1 = (0, 0, c), M_3 = (0, 0, -c),$$

uma vez que os pontos $P_1 = (0, 0)$, $P_4 = (\pi/2, 0)$, $P_7 = (\pi, 0)$, $P_{10} = (3\pi/2, 0)$, $P_{13} = (2\pi, 0)$, $P_{15} = (2\pi, \pi)$ são coincidentes no elipsóide, assim como $P_3 = (0, \pi)$, $P_6 = (\pi/2, \pi)$, $P_9 = (\pi, \pi)$, $P_{12} = (3\pi/2, \pi)$ e $P_{15} = (2\pi, \pi)$.

Figura 81 – Gráfico dos Pontos do Elipsóide onde a Curvatura Gaussiana é Mínima



Fonte: Autor.

Portanto, em resumo, concluímos que a curvatura Gaussiana do elipsóide é sempre positiva, é máxima global nos pontos $M_2 = (a, 0, 0)$ e $M_8 = (-a, 0, 0)$ da superfície cujo valor é $K = \frac{a^2}{(bc)^2}$ e é mínima global nos pontos $M_1 = (0, 0, c)$ e $M_3 = (0, 0, -c)$ cujo valor é $K = \frac{c^2}{(ab)^2}$.

3.3.9 Hiperbolóide Elíptico de Uma Folha

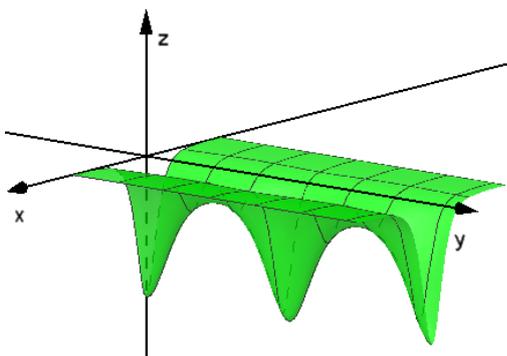
Exemplo 3.3.9. Do Exemplo 2.10.1 temos que a função curvatura K do hiperbolóide elíptico de uma folha é a função $K : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$K(u, v) = -\frac{(abc)^2}{[(bc \cosh u \cos v)^2 + (ac \cosh u \sen v)^2 + (ab \sinh u)^2]^2},$$

onde $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u \in \mathbb{R} \text{ e } 0 < v < 2\pi\}$.

Para este exemplo consideraremos o hiperbolóide elíptico de uma folha cujas constantes $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ satisfazem a condição $a > b > c$. O gráfico da curvatura Gaussiana K deste hiperbolóide elíptico de uma folha está representado na Figura 82.

Figura 82 – Gráfico da Curvatura Gaussiana do Hiperbolóide Elíptico de Uma Folha



Fonte: Autor.

(i) *Análise dos pontos onde a curvatura Gaussiana se anula*

Note que para todo $(u, v) \in U$, com $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, temos

$$K(u, v) = -\frac{(abc)^2}{[(bc \cosh u \cos v)^2 + (ac \cosh u \sen v)^2 + (ab \sinh u)^2]^2} \neq 0.$$

Logo, a curvatura Gaussiana do hiperbolóide elíptico de uma folha nunca se anula.

(ii) *Análise dos pontos onde a curvatura Gaussiana é positiva ou negativa*

Veja que para todo $(u, v) \in U$, com $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, temos

$$K(u, v) = -\frac{(abc)^2}{[(bc \cosh u \cos v)^2 + (ac \cosh u \sen v)^2 + (ab \sinh u)^2]^2} < 0.$$

Logo, a curvatura Gaussiana do hiperbolóide elíptico de uma folha é sempre negativa.

(iii) *Análise dos pontos de máximo e mínimo da curvatura Gaussiana*

Como mencionado anteriormente, iremos analisar os pontos de máximo e mínimo do hiperbolóide elíptico de uma folha cujas constantes $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ satisfazem a condição $a > b > c$. Para fazer esta análise primeiramente devemos encontrar os candidatos a máximo e mínimo local, que são os pontos críticos da superfície K . Para isto calcularemos o vetor gradiente

$$\nabla K(u, v) = (K_u, K_v)$$

e o igualaremos ao vetor nulo $(0, 0)$.

Temos que

$$K(u, v) = -\frac{(abc)^2}{[(bc \cosh u \cos v)^2 + (ac \cosh u \sen v)^2 + (ab \sinh u)^2]^2}.$$

Fazendo $A = bc \cosh u \cos v$, temos que

$$A_u = bc \sinh u \cos v, \quad A_v = -bc \cosh u \sin v.$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} B &= ac \cosh u \sin v, & B_u &= ac \sinh u \sin v, & B_v &= ac \cosh u \cos v, \\ C &= ab \sinh u, & C_u &= ab \cosh u, & C_v &= 0. \end{aligned}$$

Assim, podemos reescrever K da seguinte forma

$$K(u, v) = -(abc)^2 \cdot \frac{1}{(A^2 + B^2 + C^2)^2}.$$

Calculamos então as derivadas parciais K_u e K_v e em seguida igualemos estas expressões a 0 (zero). Temos que

$$\begin{aligned} K_u &= -(abc)^2 \cdot \left(\frac{-1 \cdot 2(A^2 + B^2 + C^2) \cdot (2AA_u + 2BB_u + 2CC_u)}{[(A^2 + B^2 + C^2)^2]^2} \right) \\ &= -(abc)^2 \cdot \left(\frac{-2(A^2 + B^2 + C^2) \cdot 2(AA_u + BB_u + CC_u)}{(A^2 + B^2 + C^2)^4} \right) \\ &= -(abc)^2 \cdot \left(\frac{-4(AA_u + BB_u + CC_u)}{(A^2 + B^2 + C^2)^3} \right) \\ &= \frac{4(abc)^2(AA_u + BB_u + CC_u)}{(A^2 + B^2 + C^2)^3}. \end{aligned}$$

Fazendo $K_u = 0$ temos

$$\frac{4(abc)^2(AA_u + BB_u + CC_u)}{(A^2 + B^2 + C^2)^3} = 0,$$

$$4(abc)^2(AA_u + BB_u + CC_u) = 0,$$

$$AA_u + BB_u + CC_u = 0,$$

$$(bc \cosh u \cos v)(bc \sinh u \cos v) + (ac \cosh u \sin v)(ac \sinh u \sin v)$$

$$+ (ab \sinh u)(ab \cosh u) = 0,$$

$$b^2c^2 \cosh u \sinh u \cos^2 v + a^2c^2 \cosh u \sinh u \sin^2 v + a^2b^2 \cosh u \sinh u = 0,$$

isto é,

$$\cosh u \sinh u (b^2c^2 \cos^2 v + a^2c^2 \sin^2 v + a^2b^2) = 0. \quad (3.3)$$

Analogamente encontramos

$$K_v = \frac{4(abc)^2(AA_v + BB_v + CC_v)}{(A^2 + B^2 + C^2)^3}.$$

Fazendo $K_v = 0$ temos

$$\frac{4(abc)^2(AA_v + BB_v + CC_v)}{(A^2 + B^2 + C^2)^3} = 0,$$

$$4(abc)^2(AA_v + BB_v + CC_v) = 0,$$

$$AA_v + BB_v + CC_v = 0,$$

$$(bc \cosh u \cos v)(-bc \cosh u \sin v) + (ac \cosh u \sin v)(ac \cosh u \cos v) + (ab \sinh u) \cdot 0 = 0,$$

$$-b^2c^2 \cosh^2 u \cos v \sin v + a^2c^2 \cosh^2 u \cos v \sin v = 0,$$

isto é,

$$\cosh^2 u \cos v \sin v(-b^2c^2 + a^2c^2) = 0. \quad (3.4)$$

Assim, para encontrar os pontos críticos de K devemos resolver o sistema a seguir em u e v formado pelas Equações 3.3 e 3.4.

$$\begin{cases} \cosh u \sinh u(b^2c^2 \cos^2 v + a^2c^2 \sin^2 v + a^2b^2) = 0 & (3.3) \\ \cosh^2 u \cos v \sin v(-b^2c^2 + a^2c^2) = 0 & (3.4) \end{cases}.$$

Primeiramente determinaremos os valores de u e v que satisfazem a equação (3.3). Como $\cosh u \neq 0$ e $(b^2c^2 \cos^2 v + a^2c^2 \sin^2 v + a^2b^2) \neq 0$, então os valores de u e v que satisfazem a equação (3.3) são tais que

$$\sinh u = 0 \Rightarrow u = 0.$$

Analogamente, como $\cosh^2 u \neq 0$ e $(-b^2c^2 + a^2c^2) \neq 0$, então os valores de u e v que satisfazem a equação (3.2) são tais que

$$\cos v = 0 \Rightarrow v = \frac{\pi}{2} \text{ ou } v = \frac{3\pi}{2},$$

$$\sin v = 0 \Rightarrow v = 0 \text{ ou } v = \pi \text{ ou } v = 2\pi.$$

Logo, os pontos $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (0, \pi/2)$, $P_3 = (0, \pi)$, $P_4 = (0, 3\pi/2)$ e $P_5 = (0, 2\pi)$ são os pontos críticos, e, portanto, os candidatos a extremantes locais. Para verificar se estes pontos são extremantes locais, calcularemos o hessiano $H(u, v)$ em cada um destes pontos, onde

$$H(u, v) = K_{uu}(u, v) \cdot K_{vv}(u, v) - (K_{uv}(u, v))^2.$$

Usando o software GeoGebra calculamos o hessiano em cada ponto crítico e obtemos

$$H_1(0, 0) > 0 \Rightarrow P_1 \text{ é um extremante local,}$$

$$H_2(0, \pi/2) < 0 \Rightarrow P_2 \text{ é um ponto de sela,}$$

$$H_3(0, \pi) > 0 \Rightarrow P_3 \text{ é um extremante local,}$$

$$H_4(0, 3\pi/2) < 0 \Rightarrow P_4 \text{ é um ponto de sela,}$$

$$H_5(0, 2\pi) > 0 \Rightarrow P_5 \text{ é um extremante local.}$$

Logo, os pontos $P_1 = (0, 0)$, $P_3 = (0, \pi)$ e $P_5 = (0, 2\pi)$ são os únicos extremantes locais. Como os pontos $P_1 = (0, 0)$ e $P_5 = (0, 2\pi)$ são coincidentes na parametrização X do hiperbolóide elíptico de uma folha, então a partir daqui analisaremos somente os pontos $P_1 = (0, 0)$ e $P_3 = (0, \pi)$. Agora, vamos verificar se estes pontos extremantes são máximos ou mínimos locais. Para isto faremos o teste da derivada parcial de segunda ordem. Usando o software GeoGebra calculamos o valor K_{uu} nos pontos $P_1 = (0, 0)$ e $P_3 = (0, \pi)$ e obtemos

$$K_{uu}(0, 0) > 0 \Rightarrow \text{o ponto } P_1 \text{ é um ponto de mínimo local,}$$

$$K_{uu}(0, \pi) > 0 \Rightarrow \text{o ponto } P_3 \text{ é um ponto de mínimo local.}$$

Podemos verificar que estes pontos, $P_1 = (0, 0)$, $P_3 = (0, \pi)$ e $P_5 = (0, 2\pi)$, são pontos de mínimo global. Para isto, calcularemos o valor de K em cada um dos pontos críticos e compararemos os valores. Temos que,

$$\begin{aligned} K(0, 0) &= -\frac{a^2}{(bc)^2}, & K(0, \pi/2) &= -\frac{b^2}{(ac)^2}, & K(0, \pi) &= -\frac{a^2}{(bc)^2}, \\ K(0, 3\pi/2) &= -\frac{b^2}{(ac)^2}, & K(0, 2\pi) &= -\frac{a^2}{(bc)^2}. \end{aligned}$$

Como $a > b > c$, então $ac > bc$. Daí, obtemos que

$$-\frac{a^2}{(bc)^2} < -\frac{b^2}{(ac)^2}.$$

Portanto, os pontos $P_1 = (0, 0)$, $P_3 = (0, \pi)$ e $P_5 = (0, 2\pi)$ são pontos de mínimo global. Assim, a curvatura Gaussiana K do hiperbolóide elíptico de uma folha é mínima nos pontos $P_1 = (0, 0)$, $P_3 = (0, \pi)$ e $P_5 = (0, 2\pi)$. Estes pontos estão representado no gráfico de K pelos pontos m_1 , m_3 e m_5 (Figura 83) dado por

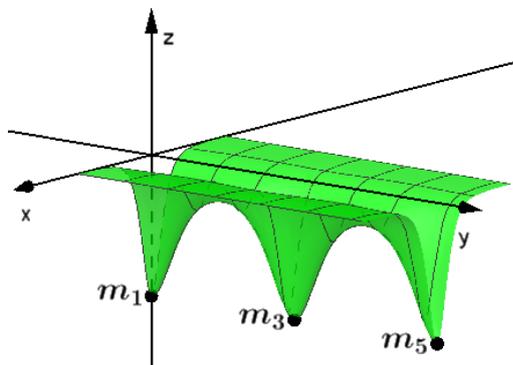
$$m_1 = \left(0, 0, -\frac{a^2}{(bc)^2}\right), m_3 = \left(0, \pi, -\frac{a^2}{(bc)^2}\right), m_5 = \left(0, 2\pi, -\frac{a^2}{(bc)^2}\right).$$

Estes mesmos pontos, $P_1 = (0, 0)$, $P_3 = (0, \pi)$, estão representados no gráfico do hiperbolóide elíptico de uma folha pelos pontos M_1 e M_3 (Figura 84) dada por

$$M_1 = (a, 0, 0), M_3 = (-a, 0, 0).$$

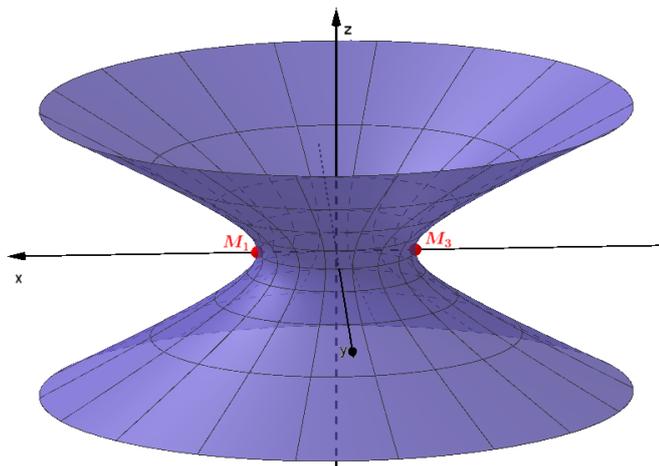
Portanto, em resumo, concluímos que a curvatura Gaussiana do hiperbolóide elíptico de uma folha é sempre negativa e é mínima global nos pontos $M_1 = (a, 0, 0)$ e $M_3 = (-a, 0, 0)$ da superfície cujo valor é $K = -\frac{a^2}{(bc)^2}$.

Figura 83 – Pontos de Mínimo no Gráfico da Curvatura Gaussiana do Hiperbolóide Elíptico de Uma Folha



Fonte: Autor.

Figura 84 – Gráfico dos Pontos do Hiperbolóide Elíptico de Uma Folha onde a Curvatura Gaussiana é Mínima



Fonte: Autor.

3.3.10 Hiperbolóide Elíptico de Duas Folhas

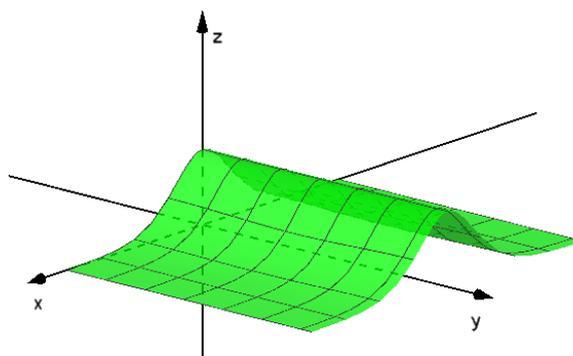
Exemplo 3.3.10. Do Exemplo 2.11.1 temos que a função curvatura K do hiperbolóide elíptico de duas folhas é a função $K : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$K(u, v) = \frac{(abc)^2}{[(bc \sinh u \cos v)^2 + (ac \sinh u \sin v)^2 + (ab \cosh u)^2]^2},$$

onde $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u \in \mathbb{R} \text{ e } 0 < v < \pi\}$.

Para este exemplo consideraremos o hiperbolóide elíptico de duas folhas cujas constantes $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ satisfazem a condição $a > b > c$. O gráfico da curvatura Gaussiana deste hiperbolóide elíptico de duas folhas está representado na Figura 85.

Figura 85 – Gráfico da Curvatura Gaussiana do Hiperbolóide Elíptico de Duas Folhas



Fonte: Autor.

(i) *Análise dos pontos onde a curvatura Gaussiana se anula*

Note que para todo $(u, v) \in U$, com $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, temos

$$K(u, v) = \frac{(abc)^2}{[(bc \sinh u \cos v)^2 + (ac \sinh u \sin v)^2 + (ab \cosh u)^2]^2} \neq 0.$$

Logo, a curvatura Gaussiana do hiperbolóide elíptico de duas folhas nunca se anula.

(ii) *Análise dos pontos onde a curvatura Gaussiana é positiva ou negativa*

Veja que para todo $(u, v) \in U$, com $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, temos

$$K(u, v) = \frac{(abc)^2}{[(bc \sinh u \cos v)^2 + (ac \sinh u \sin v)^2 + (ab \cosh u)^2]^2} > 0.$$

Logo, a curvatura Gaussiana do hiperbolóide elíptico de duas folhas é sempre positiva.

(iii) *Análise dos pontos de máximo e mínimo da curvatura Gaussiana*

Como mencionado anteriormente, iremos analisar os pontos de máximo e mínimo do hiperbolóide elíptico de duas folhas cujas constantes $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ satisfazem a condição $a > b > c$. Para fazer esta análise primeiramente devemos encontrar os candidatos a máximo e mínimo local, que são os pontos críticos da superfície K . Para isto calcularemos o vetor gradiente

$$\nabla K(u, v) = (K_u, K_v)$$

e o igualaremos ao vetor nulo $(0, 0)$.

Temos que

$$K(u, v) = \frac{(abc)^2}{[(bc \sinh u \cos v)^2 + (ac \sinh u \sin v)^2 + (ab \cosh u)^2]^2}.$$

Fazendo $A = bc \sinh u \cos v$, temos que

$$A_u = bc \cosh u \cos v, \quad A_v = -bc \sinh u \sin v.$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} B &= ac \sinh u \sin v, & B_u &= ac \cosh u \sin v, & B_v &= ac \sinh u \cos v, \\ C &= ab \cosh u, & C_u &= ab \sinh u, & C_v &= 0. \end{aligned}$$

Assim, podemos reescrever K da seguinte forma

$$K(u, v) = (abc)^2 \cdot \frac{1}{(A^2 + B^2 + C^2)^2}.$$

Calculamos então as derivadas parciais K_u e K_v e em seguida igualemos estas expressões a 0 (zero). Temos que

$$\begin{aligned} K_u &= (abc)^2 \cdot \left(\frac{-1 \cdot 2(A^2 + B^2 + C^2) \cdot (2AA_u + 2BB_u + 2CC_u)}{[(A^2 + B^2 + C^2)^2]^2} \right) \\ &= (abc)^2 \cdot \left(\frac{-2(A^2 + B^2 + C^2) \cdot 2(AA_u + BB_u + CC_u)}{(A^2 + B^2 + C^2)^4} \right) \\ &= (abc)^2 \cdot \left(\frac{-4(AA_u + BB_u + CC_u)}{(A^2 + B^2 + C^2)^3} \right) \\ &= -\frac{4(abc)^2(AA_u + BB_u + CC_u)}{(A^2 + B^2 + C^2)^3}. \end{aligned}$$

Fazendo $K_u = 0$ temos

$$\begin{aligned} -\frac{4(abc)^2(AA_u + BB_u + CC_u)}{(A^2 + B^2 + C^2)^3} &= 0, \\ -4(abc)^2(AA_u + BB_u + CC_u) &= 0, \\ AA_u + BB_u + CC_u &= 0, \\ (bc \sinh u \cos v)(bc \cosh u \cos v) + (ac \sinh u \sin v)(ac \cosh u \sin v) \\ &\quad + (ab \cosh u)(ab \sinh u) = 0, \\ b^2c^2 \sinh u \cosh u \cos^2 v + a^2c^2 \sinh u \cosh u \sin^2 v + a^2b^2 \sinh u \cosh u &= 0, \end{aligned}$$

isto é,

$$\sinh u \cosh u (b^2c^2 \cos^2 v + a^2c^2 \sin^2 v + a^2b^2) = 0. \quad (3.5)$$

Analogamente encontramos

$$K_v = -\frac{4(abc)^2(AA_v + BB_v + CC_v)}{(A^2 + B^2 + C^2)^3}.$$

Fazendo $K_v = 0$ temos

$$\begin{aligned} & - \frac{4(abc)^2(AA_v + BB_v + CC_v)}{(A^2 + B^2 + C^2)^3} = 0, \\ & - 4(abc)^2(AA_v + BB_v + CC_v) = 0, \\ & AA_v + BB_v + CC_v = 0, \\ & (bc \sinh u \cos v)(-bc \sinh u \sin v) + (ac \sinh u \sin v)(ac \sinh u \cos v) + (ab \cosh u) \cdot 0 = 0, \\ & - b^2 c^2 \sinh^2 u \cos v \sin v + a^2 c^2 \sinh^2 u \sin v \cos v = 0, \end{aligned}$$

isto é,

$$\sinh^2 u \cos v \sin v (-b^2 c^2 + a^2 c^2) = 0. \quad (3.6)$$

Assim, para encontrar os pontos críticos de K devemos resolver o sistema a seguir em u e v formado pelas Equações 3.5 e 3.6.

$$\begin{cases} \sinh u \cosh u (b^2 c^2 \cos^2 v + a^2 c^2 \sin^2 v + a^2 b^2) = 0 & (3.5) \\ \sinh^2 u \cos v \sin v (-b^2 c^2 + a^2 c^2) = 0 & (3.6) \end{cases}.$$

Primeiramente determinaremos os valores de u e v que satisfazem a equação (3.5). Como $\cosh u \neq 0$ e $(b^2 c^2 \cos^2 v + a^2 c^2 \sin^2 v + a^2 b^2) \neq 0$, então os valores de u e v que satisfazem a equação (3.5) são tais que

$$\sinh u = 0 \Rightarrow u = 0.$$

Analogamente, como $(-b^2 c^2 + a^2 c^2) \neq 0$, então os valores de u e v que satisfazem a equação (3.2) são tais que

$$\begin{aligned} \sinh^2 u & \Rightarrow u = 0, \\ \cos v = 0 & \Rightarrow v = \frac{\pi}{2}, \\ \sin v = 0 & \Rightarrow v = 0 \text{ ou } v = \pi. \end{aligned}$$

Note que $u = 0$ é solução das equações 3.5 e 3.6, isto é, $u = 0$ é solução do sistema. Logo, os pontos $(u, v) = (0, v)$ para todo $v \in [0, \pi]$, são pontos críticos de K , e, portanto, os candidatos a extremantes locais. Veja que o valor de v não interfere na designação de um ponto crítico. Essa não dependência de v para que um ponto seja ou não crítico, faz com que os pontos críticos de K pertençam ao segmento de reta r (Figura 86) dada por

$$r(v) = (0, v, K(0, v)), \quad 0 < v < \pi.$$

Assim, para verificar se os pontos que pertencem ao segmento de reta r são extremantes locais, tomaremos uma curva em K perpendicular ao segmento r , por exemplo, a curva α (Figura 86) dada por

$$\alpha(u) = (u, 0, K(u, 0)), \quad u \in \mathbb{R}.$$

Agora, analisaremos $K(u, 0)$ como uma função de uma variável. Logo, para saber se o ponto $u = 0$ é um extremante local, faremos o teste da segunda derivada. Usando o GeoGebra calculamos o valor de $K_{uu}(u, 0)$ no ponto $u = 0$ e obtemos

$$K_{uu}(0, 0) < 0 \Rightarrow \text{o ponto } u = 0 \text{ é um ponto de máximo local.}$$

Logo, os pontos $(u, v) = (0, v)$, com $v \in [0, \pi]$, são pontos de máximos locais. Verifiquemos agora se estes pontos são pontos de máximos globais. Temos que

$$K(u, v) = \frac{(abc)^2}{[(bc \sinh u \cos v)^2 + (ac \sinh u \sen v)^2 + (ab \cosh u)^2]^2},$$

$$K(0, v) = \frac{c^2}{(ab)^2}.$$

Devemos mostrar que $K(0, v) \geq K(u, v)$ para todo $(u, v) \in U$, com $a > b > c > 0$. Note que, como $\cosh u \geq 1$, temos

$$\begin{aligned} (ab)^2 &\leq (ab \cosh u)^2 \\ \Rightarrow (ab)^2 &\leq (bc \sinh u \cos v)^2 + (ac \sinh u \sen v)^2 + (ab \cosh u)^2 \\ \Rightarrow (ab)^4 &\leq [(bc \sinh u \cos v)^2 + (ac \sinh u \sen v)^2 + (ab \cosh u)^2]^2 \\ \Rightarrow \frac{1}{(ab)^4} &\geq \frac{1}{[(bc \sinh u \cos v)^2 + (ac \sinh u \sen v)^2 + (ab \cosh u)^2]^2} \\ \Rightarrow \frac{(abc)^2}{(ab)^4} &\geq \frac{(abc)^2}{[(bc \sinh u \cos v)^2 + (ac \sinh u \sen v)^2 + (ab \cosh u)^2]^2} \\ \Rightarrow \frac{c^2}{(ab)^2} &\geq \frac{(abc)^2}{[(bc \sinh u \cos v)^2 + (ac \sinh u \sen v)^2 + (ab \cosh u)^2]^2}. \end{aligned}$$

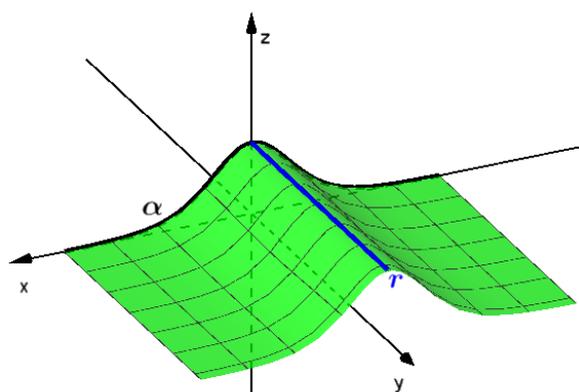
Portanto, os pontos $(u, v) = (0, v)$, com $v \in [0, \pi]$ são pontos de máximo global. Assim, a curvatura Gaussiana K do hiperbolóide elíptico de duas folhas é máxima nos pontos $(u, v) = (0, v)$, com $v \in [0, \pi]$. Estes pontos estão representado no gráfico de K pelo segmento de reta r (Figura 86) dado por

$$r(v) = (0, v, K(0, v)), \quad 0 < v < \pi.$$

Estes mesmos pontos, $(u, v) = (0, v)$, com $v \in [0, \pi]$, estão representados no gráfico do hiperbolóide elíptico de duas folhas pelo ponto P (Figura 84) dado por

$$P = X(0, v) = (0, 0, c),$$

Figura 86 – Pontos de Máximo no Gráfico da Curvatura Gaussiana do Hiperbolóide Elíptico de Duas Folhas

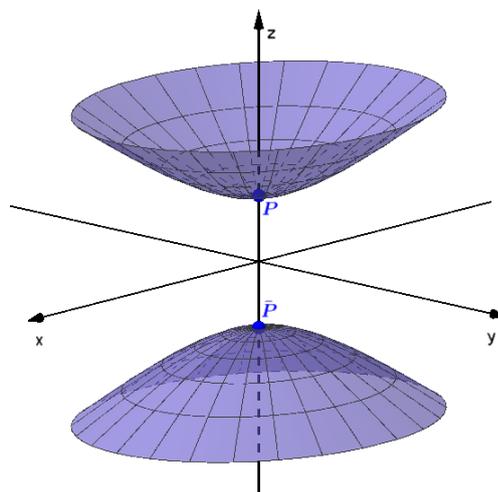


Fonte: Autor.

$$\bar{P} = \bar{X}(0, \pi) = (0, 0, -c),$$

onde X é a parametrização do hiperbolóide elíptico de uma folha do Exemplo 2.11.1. Na outra folha do hiperbolóide temos o ponto \bar{P} cuja curvatura é igual a curvatura no ponto P .

Figura 87 – Gráfico dos Pontos do Hiperbolóide Elíptico de Duas Folhas onde a Curvatura Gaussiana é Máxima



Fonte: Autor.

Portanto, em resumo, concluímos que a curvatura Gaussiana do hiperbolóide elíptico de duas folhas é sempre positiva e é máxima global nos pontos $P = (0, 0, c)$ e $\bar{P} = (0, 0, -c)$ da superfície cujo valor é $K = \frac{c^2}{(ab)^2}$.

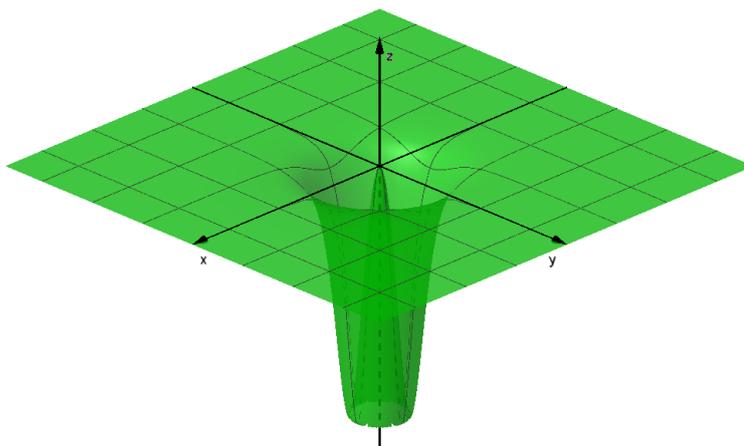
3.3.11 Sela de Macaco

Exemplo 3.3.11. Do Exemplo 2.17.1 temos que a função curvatura K da sela de macaco é a função $K : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$K(u, v) = -\frac{36(u^2 + v^2)}{(9u^4 + 18u^2v^2 + 9v^4 + 1)^2}$$

e cujo gráfico de K é representado na Figura 88.

Figura 88 – Gráfico da Curvatura Gaussiana da Sela de Macaco



Fonte: Autor.

(i) *Análise dos pontos onde a curvatura Gaussiana se anula*

Note que para $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, temos

$$\begin{aligned} K(u, v) &= 0, \\ -\frac{36(u^2 + v^2)}{(9u^4 + 18u^2v^2 + 9v^4 + 1)^2} &= 0, \\ -36(u^2 + v^2) &= 0, \\ u^2 + v^2 &= 0 \Leftrightarrow u = 0 \text{ e } v = 0. \end{aligned}$$

Logo, a curvatura Gaussiana da sela de macaco é nula no ponto $(u, v) = (0, 0)$. Este ponto está representado no gráfico de K pelo ponto p (Figura 89), tal que

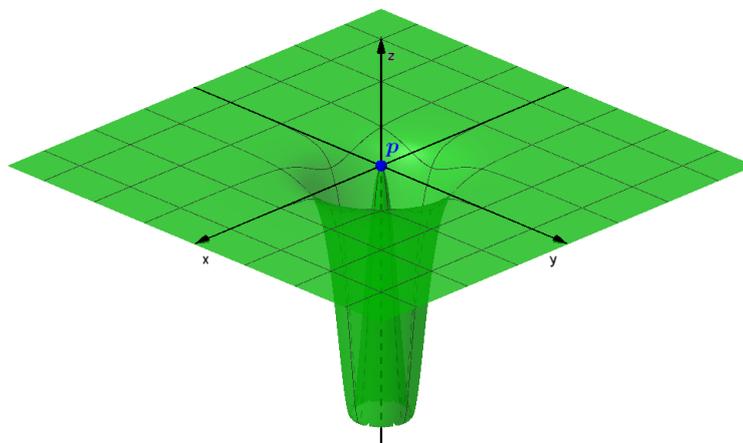
$$p = (0, 0, k(0, 0)) = (0, 0, 0).$$

Este mesmo ponto, $(u, v) = (0, 0)$, está representado no gráfico da sela de macaco pelo ponto P (Figura 90) dado por

$$P = X(0, 0) = (0, 0, 0),$$

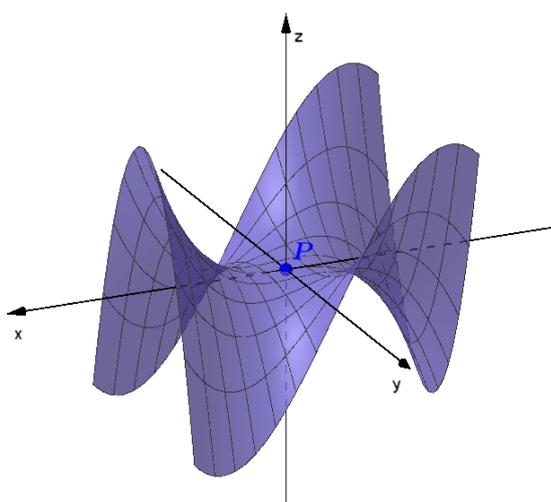
onde X é parametrização da sela de macaco (Exemplo 2.17.1).

Figura 89 – Ponto do Gráfico da Curvatura Gaussiana da Sela de Macaco onde K é Nula



Fonte: Autor.

Figura 90 – Gráfico do Ponto da Sala de Macaco onde a Curvatura Gaussiana é Nula



Fonte: Autor.

(ii) *Análise dos pontos onde a curvatura Gaussiana é positiva ou negativa*

Veja que para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ com $(u, v) \neq (0, 0)$, temos

$$K(u, v) = -\frac{36(u^2 + v^2)}{(9u^4 + 18u^2v^2 + 9v^4 + 1)^2} < 0.$$

Logo, a curvatura Gaussiana da sela de macaco é negativa nos pontos $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, tais que $(u, v) \neq (0, 0)$.

(iii) *Análise dos pontos de máximo e mínimo da curvatura Gaussiana*

Pelo item (ii) vimos que a curvatura Gaussiana da sela de macaco é sempre negativa nos pontos $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ com $(u, v) \neq (0, 0)$. Já pelo item (i) vimos ela é nula no ponto $(u, v) = (0, 0)$. Logo, podemos concluir que o ponto $(u, v) = (0, 0)$, representado por p na Figura 89 e por P na Figura 90, é também um ponto de máximo, e não apenas local, mas global.

Agora iremos verificar se existem outros pontos de máximos ou mínimos. Para fazer esta análise primeiramente devemos encontrar os candidatos a máximo e mínimo local, que são os pontos críticos da superfície K . Para isto calcularemos o vetor gradiente

$$\nabla K(u, v) = (K_u, K_v)$$

e o igualaremos ao vetor nulo $(0, 0)$.

Temos que

$$K(u, v) = -\frac{36(u^2 + v^2)}{(9u^4 + 18u^2v^2 + 9v^4 + 1)^2}.$$

Note que

$$\begin{aligned} 9u^4 + 18u^2v^2 + 9v^4 &= 9(u^4 + 2u^2v^2 + v^4), \\ &= 9(u^2 + v^2)^2. \end{aligned}$$

Fazendo $A = u^2 + v^2$, podemos reescrever K da seguinte forma

$$K(u, v) = -36 \cdot \frac{A}{(9A^2 + 1)^2}.$$

Calculemos então as derivadas parciais K_u e K_v e em seguida igualemos estas expressões a 0 (zero). Temos que

$$\begin{aligned} K_u &= -36 \cdot \frac{A_u \cdot (9A^2 + 1)^2 - A \cdot 2(9A^2 + 1) \cdot 9 \cdot 2 \cdot A \cdot A_u}{[(9A^2 + 1)^2]^2} \\ &= -36 \cdot \frac{A_u(9A^2 + 1)^2 - 36A^2 A_u(9A^2 + 1)}{(9A^2 + 1)^4} \\ &= -36 \cdot \frac{A_u(9A^2 + 1)((9A^2 + 1) - 36A^2)}{(9A^2 + 1)^4} \\ &= -36 \cdot \frac{A_u(1 - 27A^2)}{(9A^2 + 1)^3} \\ &= -\frac{36A_u(1 - 27A^2)}{(9A^2 + 1)^3}. \end{aligned}$$

Fazendo $K_u = 0$ temos

$$\begin{aligned} -\frac{36A_u(1 - 27A^2)}{(9A^2 + 1)^3} &= 0, \\ -36A_u(1 - 27A^2) &= 0, \\ A_u(1 - 27A^2) &= 0, \end{aligned}$$

isto é,

$$2u(1 - 27(u^2 + v^2)^2) = 0. \tag{3.7}$$

Analogamente encontramos

$$K_v = -\frac{36A_v(1 - 27A^2)}{(9A^2 + 1)^3}.$$

Fazendo $K_v = 0$, temos

$$\begin{aligned} -\frac{36A_v(1 - 27A^2)}{(9A^2 + 1)^3} &= 0, \\ -36A_v(1 - 27A^2) &= 0, \\ A_v(1 - 27A^2) &= 0, \end{aligned}$$

isto é,

$$2v(1 - 27(u^2 + v^2)^2) = 0. \quad (3.8)$$

Assim, para encontrar os pontos críticos de K devemos resolver o sistema em u e v formado pelas Equações 3.7 e 3.8. A solução deste sistema são os pontos $(u, v) = (0, 0)$ e $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, tais que

$$B = u^2 + v^2 = \frac{1}{\sqrt{27}}.$$

O ponto $(u, v) = (0, 0)$ já verificamos que é um ponto de máximo global de K .

Agora, denotaremos por \bar{u} e \bar{v} os pontos $(\bar{u}, \bar{v}) \in \mathbb{R}^2$, tais que

$$\bar{u}^2 + \bar{v}^2 = \frac{1}{\sqrt{27}}.$$

e verificaremos se estes pontos são de máximo ou mínimo. Calculando o valor de K nestes pontos obtemos

$$K(\bar{u}, \bar{v}) = -\frac{3\sqrt{27}}{4}.$$

Usando o software GeoGebra podemos concluir que a função

$$f(A) = 81\sqrt{27}A^4 + 18\sqrt{27}A^2 - 48A + \sqrt{27} \geq 0$$

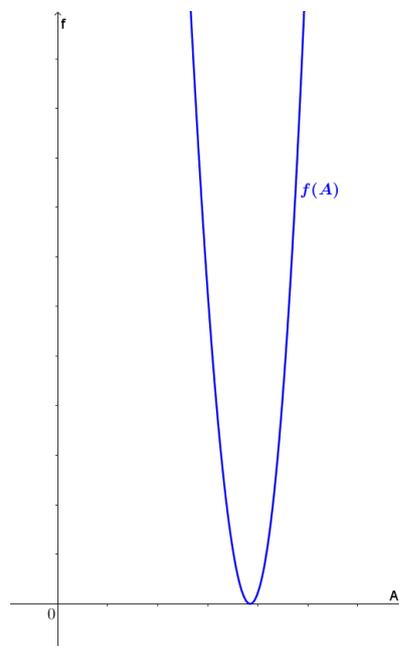
para todo $A \geq 0$ ($A = u^2 + v^2$), como pode ser observado na figura 91.

Daí, temos que

$$\begin{aligned} 81\sqrt{27}A^4 + 18\sqrt{27}A^2 - 48A + \sqrt{27} &\geq 0 \\ \Rightarrow 81\sqrt{27}A^4 + 18\sqrt{27}A^2 + \sqrt{27} &\geq 48A \\ \Rightarrow \sqrt{27}(81A^4 + 18A^2 + 1) &\geq 48A \\ \Rightarrow \sqrt{27}(9A^2 + 1)^2 &\geq 48A \\ \Rightarrow \frac{\sqrt{27}(9A^2 + 1)^2}{\sqrt{27}(9A^2 + 1)^2} &\geq \frac{48A}{\sqrt{27}(9A^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 1 \geq \frac{48A}{\sqrt{27}(9A^2 + 1)^2} \\ \Rightarrow 1 \cdot \frac{3\sqrt{27}}{4} &\geq \frac{48A}{\sqrt{27}(9A^2 + 1)^2} \cdot \frac{3\sqrt{27}}{4} \\ &\Rightarrow \frac{3\sqrt{27}}{4} \geq \frac{36A}{(9A^2 + 1)^2} \\ \Rightarrow -\frac{3\sqrt{27}}{4} &\leq -\frac{36A}{(9A^2 + 1)^2} \\ &\Rightarrow K(\bar{u}, \bar{v}) \leq K(u, v). \end{aligned}$$

Figura 91 – Gráfico da Função $f(A)$



Fonte: Autor.

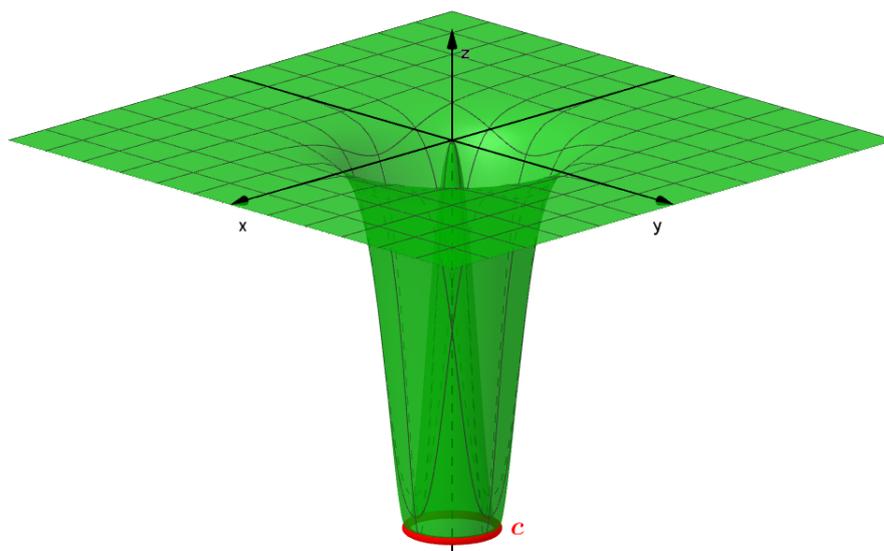
Logo, os pontos $(\bar{u}, \bar{v}) \in \mathbb{R}^2$, tais que

$$\bar{u}^2 + \bar{v}^2 = \frac{1}{\sqrt{27}}.$$

são pontos de mínimo global. Assim, a curvatura Gaussiana K da sela de macaco é mínima nestes pontos. Estes pontos estão representado no gráfico de K pela curva c (Figura 92).

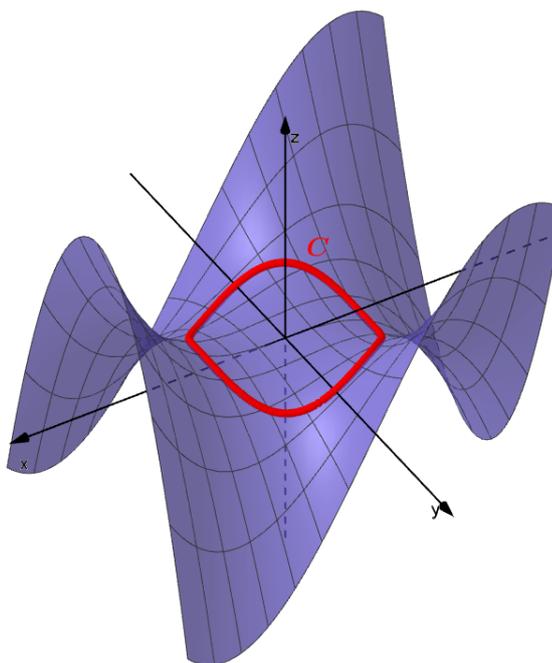
Estes mesmos pontos, $(\bar{u}, \bar{v}) \in \mathbb{R}^2$, estão representados no gráfico da sela de macao pela curva C (Figura 93).

Figura 92 – Pontos de Mínimo no Gráfico da Curvatura Gaussiana da Sela de Macaco



Fonte: Autor.

Figura 93 – Gráfico dos Pontos da Sela de Macaco onde a Curvatura Gaussiana é Mínima



Fonte: Autor.

Portanto, em resumo, concluímos que a curvatura Gaussiana da sela de macaco é negativa nos pontos $(u, v) \neq (0, 0)$, é nula e máxima global no ponto $P = (0, 0, 0)$ da superfície e é mínima global nos pontos da curva C contida na superfície.

3.4 TABELAS COM RESUMOS DAS ANÁLISES DAS CURVATURAS GAUSSIANAS DAS SUPERFÍCIES REGULARES CLÁSSICAS

Tabela 2 – Análise de K : Plano, Cilindros e Cones

Análise de K	Superfície: Plano, Cilindros e Cones
Nula	Em todos os pontos da superfície
Positiva	\emptyset
Negativa	\emptyset
Máxima	\emptyset
Mínima	\emptyset

Fonte: Autor

Tabela 3 – Análise de K : Esfera

Análise de K	Superfície: Esfera
Nula	\emptyset
Positiva	Em todos os pontos da superfície
Negativa	\emptyset
Máxima	\emptyset
Mínima	\emptyset

Fonte: Autor

Tabela 4 – Análise de K : Pseudo-esfera

Análise de K	Superfície: Pseudo-esfera
Nula	\emptyset
Positiva	\emptyset
Negativa	Em todos os pontos da superfície
Máxima	\emptyset
Mínima	\emptyset

Fonte: Autor

Tabela 5 – Análise de K : Helicóide

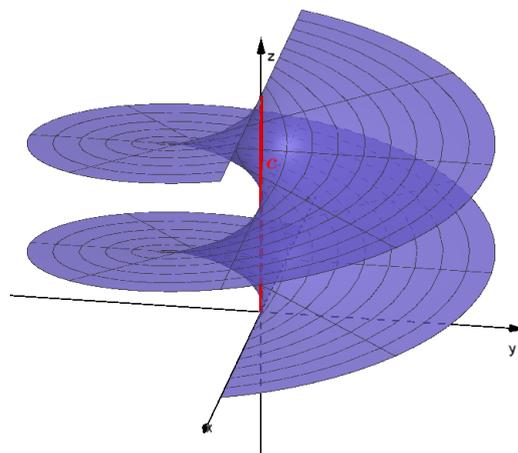
Análise de K	Superfície: Helicóide
Nula	\emptyset
Positiva	\emptyset
Negativa	Em todos os pontos da superfície
Máxima	\emptyset

Continua...

Análise de K	Superfície: Helicóide
Mínima	Nos pontos $(u, v) = (u, 0)$, com $0 < u < 2\pi \Leftrightarrow c$

Fonte: Autor

Figura 94 – Resumo: Curvatura Gaussiana do Helicóide



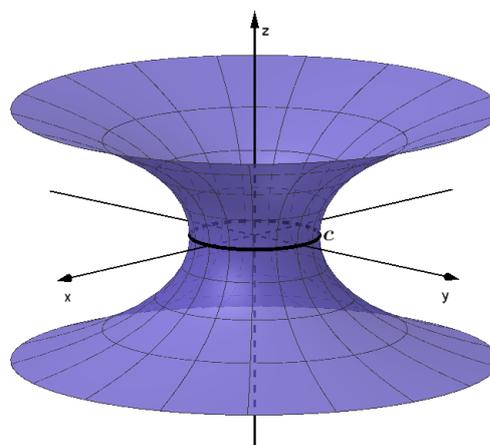
Fonte: Autor.

Tabela 6 – Análise de K : Catenóide

Análise de K	Superfície: Catenóide
Nula	\emptyset
Positiva	\emptyset
Negativa	Em todos os pontos da superfície
Máxima	\emptyset
Mínima	Nos pontos $(u, v) = (u, 0)$, com $0 < u < 2\pi \Leftrightarrow c$

Fonte: Autor

Figura 95 – Resumo: Curvatura Gaussiana do Catenóide



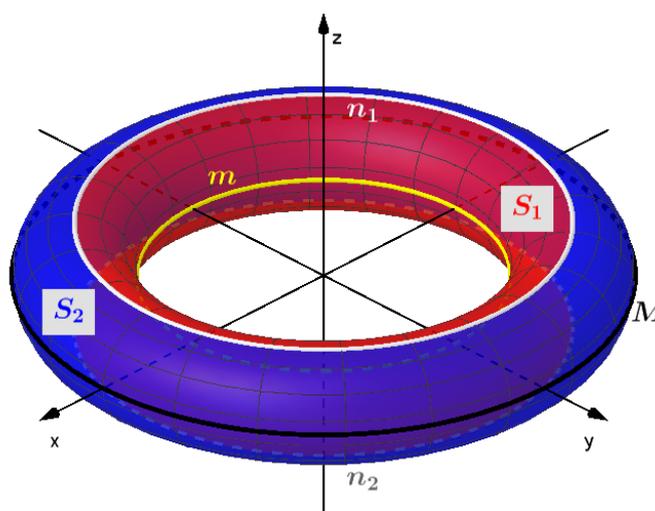
Fonte: Autor.

Tabela 7 – Análise de K : Toro

Análise de K	Superfície: Toro
Nula	Nos pontos $(u, v) = \left(u, \frac{\pi}{2}\right)$ e $(u, v) = \left(u, \frac{3\pi}{2}\right)$, com $0 < u < 2\pi \Leftrightarrow n_1$ e n_2
Positiva	Nos pontos (u, v) tal que $0 < v < \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2} < v < 2\pi \Leftrightarrow S_2$
Negativa	Nos pontos (u, v) tal que $\frac{\pi}{2} < v < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow S_1$
Máxima	Nos pontos $(u, v) = (u, 0)$ e $(u, v) = (u, 2\pi)$ com $0 < u < 2\pi \Leftrightarrow M_1$
Mínima	Nos pontos $(u, v) = (u, \pi)$, com $0 < u < 2\pi \Leftrightarrow m$

Fonte: Autor

Figura 96 – Resumo: Curvatura Gaussiana do Toro



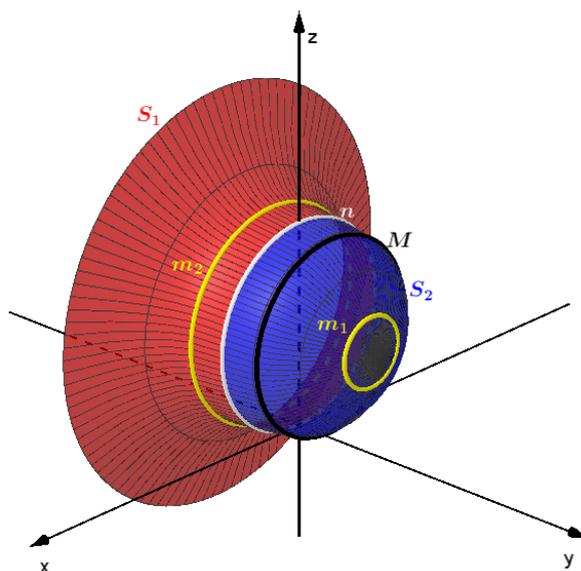
Fonte: Autor.

Tabela 8 – Análise de K : Chapéu de Scherlock

Análise de K	Superfície: Chapéu de Scherlock
Nula	Nos pontos $(u, v) = (0, v)$, com $0 < v < 2\pi \Leftrightarrow n$
Positiva	Nos pontos (u, v) tal que $0 < u < 1 \Leftrightarrow S_2$
Negativa	Nos pontos (u, v) tal que $-1 < u < 0 \Leftrightarrow S_1$
Máxima	Nos pontos $(u, v) = (x(B), v)$, com $0 < v < 2\pi \Leftrightarrow M$
Mínima	Nos pontos $(u, v) = (x(A), v)$ e $(u, v) = (x(C), v)$, $0 < v < 2\pi \Leftrightarrow m_1$ e m_2

Fonte: Autor

Figura 97 – Resumo: Curvatura Gaussiana do Chapéu de Sherlock



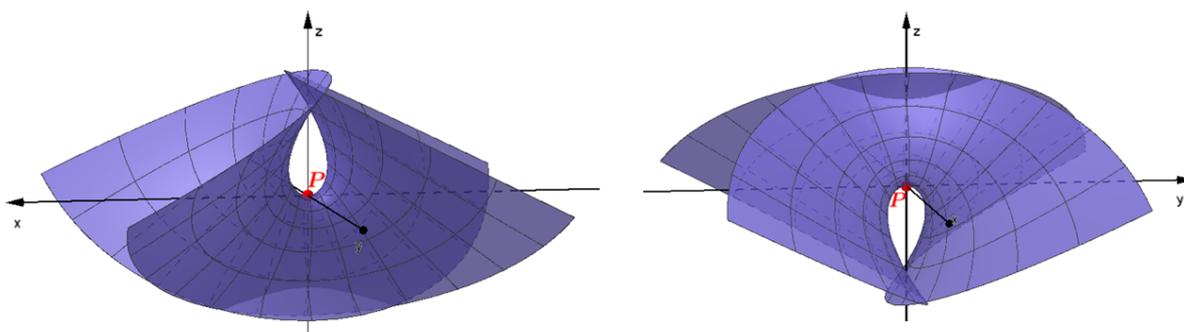
Fonte: Autor.

Tabela 9 – Análise de K : Superfície de Enneper

Análise de K	Superfície: Superfície de Enneper
Nula	\emptyset
Positiva	\emptyset
Negativa	Em todos os pontos da superfície
Máxima	\emptyset
Mínima	No ponto $(u, v) = (0, 0) \Leftrightarrow P$

Fonte: Autor

Figura 98 – Resumo: Curvatura Gaussiana da Superfície de Enneper



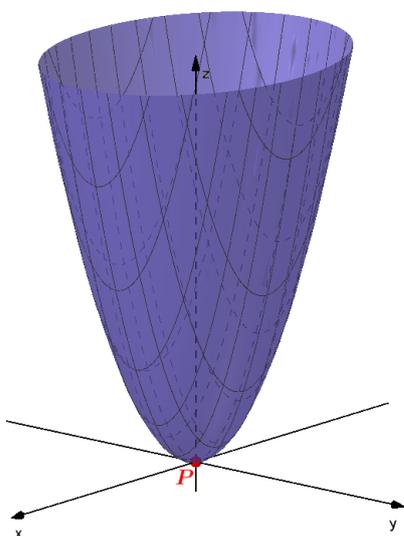
Fonte: Autor.

Tabela 10 – Análise de K : Parabolóide Elíptico

Análise de K	Superfície: Parabolóide Elíptico
Nula	\emptyset
Positiva	Em todos os pontos da superfície
Negativa	\emptyset
Máxima	No ponto $(u, v) = (0, 0) \Leftrightarrow P$
Mínima	\emptyset

Fonte: Autor

Figura 99 – Resumo: Curvatura Gaussiana do Parabolóide Elíptico



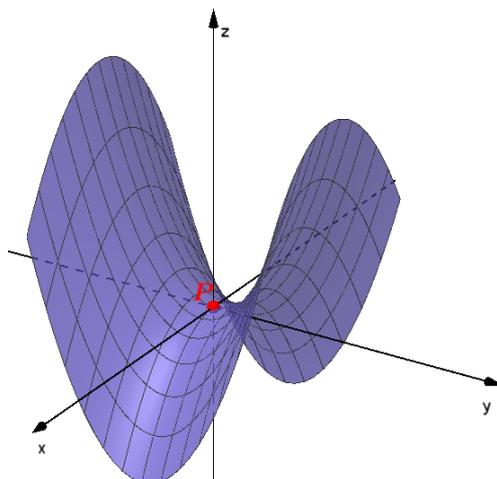
Fonte: Autor.

Tabela 11 – Análise de K : Parabolóide Hiperbólico

Análise de K	Superfície: Parabolóide Hiperbólico
Nula	\emptyset
Positiva	\emptyset
Negativa	Em todos os pontos da superfície
Máxima	\emptyset
Mínima	No ponto $(u, v) = (0, 0) \Leftrightarrow P$

Fonte: Autor

Figura 100 – Resumo: Curvatura Gaussiana do Parabolóide Hiperbólico



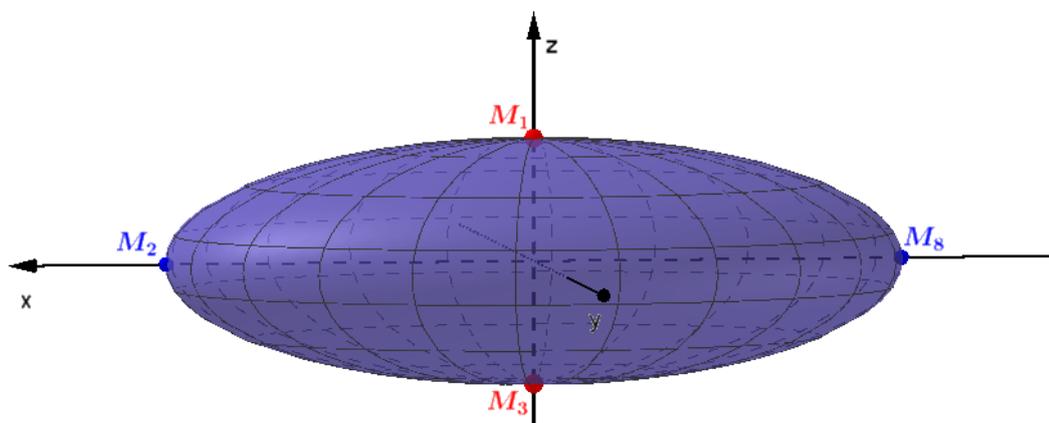
Fonte: Autor.

Tabela 12 – Análise de K : Elipsóide

Análise de K	Superfície: Elipsóide
Nula	\emptyset
Positiva	Em todos os pontos da superfície
Negativa	\emptyset
Máxima	Nos pontos $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)$ e $\left(2\pi, \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow M_2$ e M_8
Mínima	Nos pontos $(u, 0)$ e (u, π) , com $0 < u < 2\pi \Leftrightarrow M_1$ e M_3

Fonte: Autor

Figura 101 – Resumo: Curvatura Gaussiana do Elipsóide



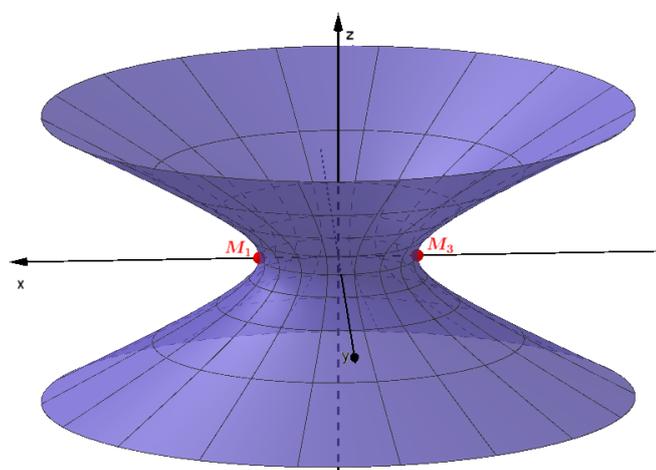
Fonte: Autor.

Tabela 13 – Análise de K : Hiperbolóide Elíptico de Uma Folha

Análise de K	Superfície: Hiperbolóide Elíptico de Uma Folha
Nula	\emptyset
Positiva	\emptyset
Negativa	Em todos os pontos da superfície
Máxima	\emptyset
Mínima	Nos pontos $(0, 0)$, $(0, \pi)$ e $(0, 2\pi) \Leftrightarrow M_1$ e M_3

Fonte: Autor

Figura 102 – Resumo: Curvatura Gaussiana do Hiperbolóide Elíptico de Uma Folha



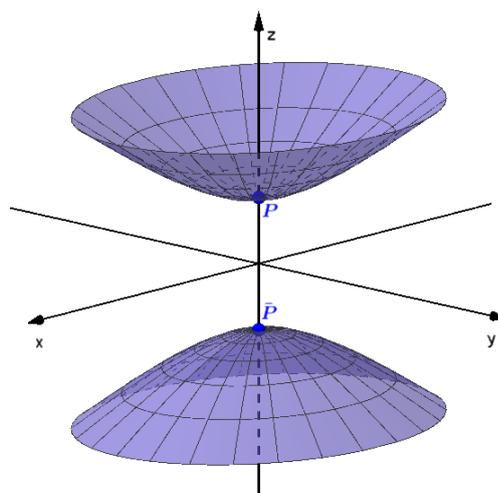
Fonte: Autor.

Tabela 14 – Análise de K : Hiperbolóide Elíptico de Duas Folhas

Análise de K	Superfície: Hiperbolóide Elíptico de Duas Folhas
Nula	\emptyset
Positiva	Em todos os pontos da superfície
Negativa	\emptyset
Máxima	Nos pontos $(u, v) = (0, v)$, com $0 < v < \pi \Leftrightarrow P$ e \bar{P}
Mínima	\emptyset

Fonte: Autor

Figura 103 – Resumo: Curvatura Gaussiana do Hiperbolóide Elíptico de Duas Folhas



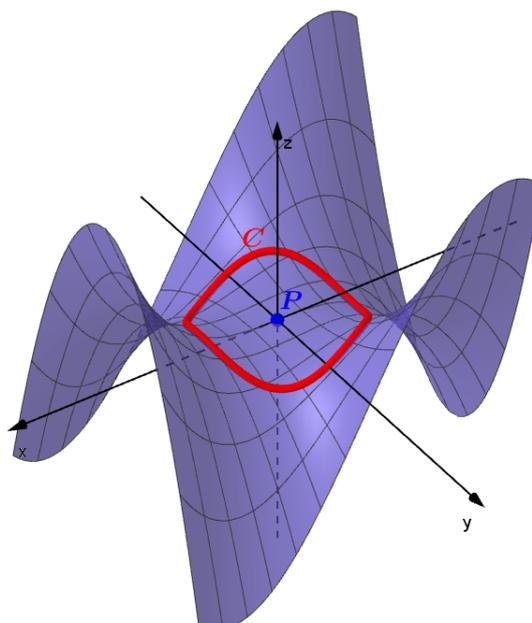
Fonte: Autor.

Tabela 15 – Análise de K : Sela de Macaco

Análise de K	Superfície: Sela de Macaco
Nula	No ponto $(u, v) = (0, 0) \Leftrightarrow P$
Positiva	\emptyset
Negativa	Nos pontos $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, tais que $(u, v) \neq (0, 0)$
Máxima	No ponto $(u, v) = (0, 0) \Leftrightarrow P$
Mínima	Nos pontos $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, tais que $u^2 + v^2 = \frac{1}{\sqrt{27}} \Leftrightarrow C$

Fonte: Autor

Figura 104 – Resumo: Curvatura Gaussiana da Sela de Macaco



Fonte: Autor.

CONCLUSÃO

Estudar a curvatura Gaussiana dos pontos de uma superfície regular nos permite conhecer um pouco mais sobre as suas características. Neste estudo trabalhamos com as superfícies regulares já conhecidas pela grande maioria dos acadêmicos de matemática que estudam Geometria Diferencial a fim de dar-lhes mais detalhes sobre essas superfícies tão presentes em seus estudos.

O método sistemático para o cálculo da expressão geral (K) da curvatura Gaussiana de uma superfície regular, apresentado no Capítulo 2 deste trabalho, mostrou-se útil ao longo do trabalho. O Teorema 1.7.1 nos garante que a curvatura Gaussiana é uma propriedade intrínseca, o que implica que o seu valor em um ponto da superfície depende somente de como as distâncias são medidas sobre a superfície mas não da maneira como estas superfícies estão imersas no espaço.

Por meio das expressões das curvaturas Gaussianas encontradas no Capítulo 2 concluímos diretamente que o plano, o cilindro (elíptico, circular, parabólico e hiperbólico) e o cone (elíptico e circular) possuem curvatura Gaussiana nula em todos os seus pontos. Do mesmo modo também concluímos que a esfera e a pseudo-esfera possuem curvatura Gaussiana constante não-nula em todos os seus pontos, sendo a curvatura Gaussiana da esfera um número real positivo e da pseudo-esfera um número real negativo.

Também verificamos que o helicóide, o catenóide, a superfície de Enneper, o parabolóide hiperbólico e o hiperbolóide elíptico de uma folha possuem curvatura Gaussiana negativa em todos os seus pontos. Analogamente, concluiu-se que o elipsóide, o parabolóide elíptico e o hiperbolóide elíptico de duas folhas possuem curvatura Gaussiana positiva em todos os seus pontos. Já o toro e o chapéu de Scherlock possuem pontos com curvatura Gaussiana nula, negativa e positiva.

Além disso, através das análises feitas em cima das expressões das curvaturas Gaussianas, verificamos que algumas superfícies S possuem uma curva α na qual todos os pontos dessa curva são pontos onde a curvatura Gaussiana é máxima, como no toro e no chapéu de Scherlock. No entanto, também verificamos casos onde a curvatura Gaussiana é máxima apenas em um ponto p da superfície S , como no caso do parabolóide elíptico e da sela de macaco. Analogamente para pontos onde a curvatura Gaussiana é mínima.

Por fim esperamos que este trabalho contribua para um maior conhecimento sobre o comportamento da curvatura de superfícies clássicas em seus pontos e inspire outros estudantes para o estudo de Geometria Diferencial.

REFERÊNCIAS

- CARMO, M. P. do. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. 620 p.
- FRENSEL, K. R.; DELGADO, J. J. **Notas de Aula de Geometria Analítica II**. Portal STI - UFF, 2008. Disponível em: <<https://www.professores.uff.br/katiafrensel/wp-content/uploads/sites/115/2017/08/ga2-aula10.pdf>>. Acesso em: 30 out. 2022.
- GORODSKI, C. Um breve panorama histórico da geometria. **Matemática Universitária**, n. 44, p. 14–29, jun. 2008. Disponível em: <https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/27/2018/03/n44_Artigo02.pdf>. Acesso em: 29 maio 2022.
- GRAY, A.; ABBENA, E.; SALAMON, S. **Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica**. 3. ed. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2017. 1011 p.
- GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001. v. 1. 652 p.
- GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001. v. 2. 496 p.
- LIMA, E. L. **Álgebra Linear**. 9. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2018. 357 p.
- OLIVEIRA, J. de; RUFINO, E. de O. A aplicação normal de gauss e as superfícies quádricas. **Matemática Universitária**, n. 37, p. 15–32, dez. 2004. Disponível em: <https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/27/2018/03/n37_Artigo03.pdf>. Acesso em: 07 jun. 2022.
- O'NEILL, B. **Elementary Differential Geometry**. 2. ed. Burlington: Academic Press (Elsevier), 2006. 520 p.
- TENENBLAT, K. **Introdução à Geometria Diferencial**. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2008. 280 p.

Anexos

A MÁXIMOS E MÍNIMOS DE FUNÇÕES DE UMA E DUAS VARIÁVEIS

Neste anexo estão as principais definições e teoremas que serão utilizados no Capítulo 3. Para mais detalhes e aprofundamento sobre estes tópicos recomendamos a leitura de Guidorizzi (2001a) e Guidorizzi (2001b).

A.1 MÁXIMOS E MÍNIMOS DE FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL

Definição A.1.1. *Sejam f uma função e $p \in D_f$. Dizemos que $f(p)$ é valor máximo global de f ou que p é um ponto de máximo global de f se, para todo $x \in D_f$,*

$$f(x) \leq f(p).$$

Se, para todo x em D_f ,

$$f(x) \geq f(p),$$

diremos então que $f(p)$ é o valor mínimo global de f ou que p é um ponto de mínimo global de f .

Definição A.1.2. *Sejam f uma função e $p \in D_f$. Dizemos que p é ponto de máximo local de f se existir $r > 0$ tal que*

$$f(x) \leq f(p)$$

para todo x em $(p - r, p + r) \cap D_f$. Por outro lado, dizemos que p é ponto de mínimo local de f se existir $r > 0$ tal que

$$f(x) \geq f(p)$$

para todo x em $(p - r, p + r) \cap D_f$.

Teorema A.1.1 (Condição Necessária). *Seja f uma função derivável em p , em que p é um ponto interior a D_f . Uma condição necessária para que p seja ponto de máximo ou de mínimo local é que*

$$f'(p) = 0.$$

Demonstração. A demonstração deste teorema pode ser visto em Guidorizzi (2001a, p. 280).

Teorema A.1.2 (Condição Suficiente). *Sejam f uma função que admite derivada de segunda ordem contínua no intervalo aberto I e $p \in I$.*

1. $f'(p) = 0$ e $f''(p) > 0 \Rightarrow p$ é ponto de mínimo local.
2. $f'(p) = 0$ e $f''(p) < 0 \Rightarrow p$ é ponto de máximo local.

Demonstração. A demonstração deste teorema pode ser visto em Guidorizzi (2001a, p. 281).

A.2 MÁXIMOS E MÍNIMOS DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

Definição A.2.1. *Seja $f(x, y)$ uma função a valores reais e $(x_0, y_0) \in D_f$. Dizemos que (x_0, y_0) é ponto de máximo global de f se, para todo $(x, y) \in D_f$,*

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0).$$

Diremos, neste caso, que $f(x_0, y_0)$ é o valor máximo. Por outro lado se, para todo $(x, y) \in D_f$,

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0).$$

Diremos, neste caso, que $f(x_0, y_0)$ é o valor mínimo.

Definição A.2.2. *Seja $f(x, y)$ uma função a valores reais e $(x_0, y_0) \in D_f$. Dizemos que (x_0, y_0) é ponto de máximo local de f se existir uma bola aberta B de centro (x_0, y_0) , tal que*

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

para todo $(x, y) \in B \cap D_f$. Por outro lado, dizemos que (x_0, y_0) é ponto de mínimo local de f se existir uma bola aberta B de centro (x_0, y_0) , tal que

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$$

para todo $(x, y) \in B \cap D_f$.

Os pontos de máximo e de mínimo de uma função f denominam-se *extremantes* de f .

Teorema A.2.1 (Condição Necessária 1). *Seja (x_0, y_0) um ponto interior de D_f e suponha que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ existam. Nestas condições, uma condição necessária para que (x_0, y_0) seja um extremante local de f é que*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Demonstração. A demonstração deste teorema pode ser visto em Guidorizzi (2001b, p. 309).

Teorema A.2.2 (Condição Necessária 2). *Seja f de classe C^2 e seja (x_0, y_0) um ponto interior do domínio de f . Uma condição necessária para que (x_0, y_0) seja ponto de máximo local de f é que (x_0, y_0) seja ponto crítico de f e, além disso,*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \leq 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \leq 0.$$

Por outro lado, uma condição necessária para que (x_0, y_0) seja ponto de mínimo local de f é que (x_0, y_0) seja ponto crítico de f e, além disso,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \geq 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \geq 0.$$

Demonstração. A demonstração deste teorema pode ser visto em Guidorizzi (2001b, p. 311).

Seja $f(x, y)$ de classe C^2 . A função dada por

$$H(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{vmatrix}$$

denomina-se *hessiano* de f . Observe que

$$H(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \right)^2.$$

Teorema A.2.3 (Condição Suficiente). *Sejam $f(x, y)$ de classe C^2 e (x_0, y_0) um ponto interior de D_f . Suponhamos que (x_0, y_0) seja ponto crítico de f . Então*

1. *Se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$ e $H(x_0, y_0) > 0$, então (x_0, y_0) será ponto de mínimo local de f .*
2. *Se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$ e $H(x_0, y_0) > 0$, então (x_0, y_0) será ponto de máximo local de f .*
3. *Se $H(x_0, y_0) < 0$, então (x_0, y_0) não será extremante local. Nesta caso, (x_0, y_0) será ponto de sela.*
4. *Se $H(x_0, y_0) = 0$, nada se pode afirmar.*

Demonstração. A demonstração deste teorema pode ser visto em Guidorizzi (2001b, p. 313).