



UFRR

UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

EUDES COSTA LIMA

O PLANÍMETRO POLAR E SUA RELAÇÃO COM O TEOREMA DE GREEN.

Boa Vista, RR

2022

EUDES COSTA LIMA

O PLANÍMETRO POLAR E SUA RELAÇÃO COM O TEOREMA DE GREEN.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como pré-requisito para obtenção do título de licenciado em Matemática da Universidade Federal de Roraima.

Orientador: Prof. Dr. Elzimar Oliveira Rufino
Coorientador: Prof. Dr. José Ivanildo de Lima

Boa Vista, RR

2022

EUDES COSTA LIMA

O PLANÍMETRO POLAR E SUA RELAÇÃO COM O TEOREMA DE GREEN.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como pré-requisito para obtenção do título de licenciado em Matemática da Universidade Federal de Roraima. Defendida em 17 de março de 2022 e avaliada pela seguinte banca examinadora.

Prof. Dr. Elzimar Oliveira Rufino
Orientador - UFRR

Prof. Dr. Lindeval Fernandes de Lima
Membro/DMAT-UFRR

Prof. Me. Stephen Roosevelt Barreto Soares
Membro/SEED-RR

Boa Vista, RR
2022

*A Deus, que iluminou minha caminhada
a minha esposa e meus pais: Luciana Lopes Silva Martins,
José Vieira Lima e Teresa Costa Lima
pelo apoio incondicional.*

AGRADECIMENTOS

Primeiramente à vida e saúde, que foi presenteada por Deus, que sempre foi e será o autor de meu destino, meu guia, socorro presente na hora da angústia.

Aos meus pais, José Vieira Lima e Teresa Costa Lima, pelo amor, carinho e por sempre ter cuidado de mim, ajudando-me nos momentos que mais precisei.

Ao professor, Dr. Elzimar Oliveira Rufino, por ter me orientado e auxiliado no desenvolvimento deste trabalho, e por sua imensa dedicação a profissão por ele escolhida.

Ao professor, Dr. José Ivanildo de Lima, por ter me auxiliado no desenvolvimento deste trabalho, e por sua imensa dedicação a profissão por ele escolhida.

Ao professor, Dr. José Luiz, por ter me auxiliado no desenvolvimento deste trabalho, e por sua imensa dedicação a profissão por ele escolhida.

A todos que contribuíram diretamente e indiretamente para que eu chegasse até aqui e alcançasse esse objetivo.

"A ciência atual troca a realidade pela Matemática."

Nikola Tesla

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo apresentar uma relação que existe entre o Planímetro Polar e o Teorema de Green e na sequência realizar uma aplicação prática no cálculo de área. Para tanto, fizemos uma pesquisa bibliográfica afim de obter uma melhor compreensão sobre o tema. Realizamos, então, uma pesquisa de revisão bibliográfica da literatura sobre o tema proposto com o intuito de concretizar nosso objetivo. Fizemos esclarecimentos em partes dos cálculos sobre a referida relação, no trabalho pode ser verificado que foram feitas melhorias nos cálculos e nos procedimentos de como utilizar o instrumento. Na parte prática, procuramos deixar claro ao leitor como realizar a aplicação do planímetro polar. Utilizamos uma situação real, onde calculamos a área de uma região situada no Parque Anauá, na cidade de Boa Vista, estado de Roraima. O trabalho é complementado com várias ilustrações, possibilitando ao leitor uma boa compreensão a respeito do assunto estudado.

Palavras-chave: Planímetro. Relação. Teorema de Green.

ABSTRACT

This work aims to present a relationship that exists between the Polar Planimeter and Green's Theorem and then carry out a practical application in area calculation. Therefore, we did a bibliographic research in order to obtain a better understanding of the subject. We then carried out a bibliographic review of the literature on the proposed theme in order to achieve our objective. We made clarifications in parts of the calculations about that relationship, in the work it can be verified that improvements were made in the calculations and in the procedures of how to use the instrument. In the practical part, we try to make it clear to the reader how to apply the polar planimeter. We used a real situation, where we calculated the area of a region located in Parque Anauá, in the city of Boa Vista, state of Roraima. The work is complemented with several illustrations, providing the reader with a good understanding of the subject studied.

Key-words: Planimeter. Relationship . Green's Theorem.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

1	Planímetro Polar.....	12
2	Receptáculo	14
3	Tabela de Calibragem	15
4	Alinhamento da parte inteira	15
5	Alinhamento da parte decimal.....	16
6	Contador em Disco.....	16
7	Integrante	16
8	Integrante	17
9	Integrante	17
10	Curva Suave	18
11	Curva não Suave.....	19
12	Tipos de Curvas	19
13	Curva Parcialmente Suave	20
14	Vetores do Campo Vetorial F	20
15	Curvas C_1, C_2	22
16	Curvas C_3, C_4	23
17	Hastes centradas em (0,0) e (a,b).	24
18	Parque Anauá na Cidade de Boa Vista, RR.....	32
19	1º Dígito	33
20	2º Dígito	33
21	3º Dígito	34
22	4º Dígito	34

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	PLANÍMETRO	11
3	UTILIZAÇÃO, CALIBRAGEM E LEITURA DO PLANÍMETRO	13
3.1	UTILIZAÇÃO	13
3.2	CALIBRAGEM	14
3.3	LEITURA	16
4	A MATEMÁTICA SUPERIOR ENVOLVIDA	18
4.1	DEFINIÇÕES	18
4.2	O TEOREMA DE GREEN	21
4.3	UMA RELAÇÃO ENTRE O PLANÍMETRO POLAR E O TEOREMA DE GREEN	24
5	ATIVIDADE UTILIZANDO O PLANÍMETRO POLAR	32
5.1	ATIVIDADE 1	32
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	35
	REFERÊNCIAS	36

1 INTRODUÇÃO

O Planímetro Polar, de acordo com Ferreira (2020), é essencialmente um pequeno coordenatógrafo utilizado em diversas áreas do conhecimento, tais como: Arquitetura, Geologia, Minas, Química, Biologia, Medicina, Física, Planejamento Urbano, Cartografia, Cadastro, Topografia, Construção de um modo geral, dentre outras.

Este trabalho tem como objetivo apresentar uma relação que existe entre o Planímetro Polar e o Teorema de Green e depois verificar esta relação utilizando uma aplicação prática.

Sabe-se que o cálculo de áreas de figuras planas começou de forma intuitiva da observação do homem, o primeiro a formalizar a geometria plana foi Euclides de Alexandria com seu famoso trabalho Os Elementos (FERRET, 2007. p. 05).

Além disso com o decorrer do tempo foram criados instrumentos capazes de medir áreas planas que é a função do Planímetro Polar. Mostra uma relação entre o Planímetro Polar e o Teorema de Green é importante para o aprimoramento do conhecimento sobre o assunto.

Realiza-se uma pesquisa de revisão bibliográfica da literatura sobre o tema proposto.

A primeira seção deste trabalho é a introdução, onde procuramos contextualizar as diversas áreas onde o planímetro pode ser utilizado, mencionamos nosso objetivo de relacionar o planímetro com o Teorema de Green e explicitamos os assuntos tratados nas seções posteriores.

Na terceira seção foi detalhado a utilização, calibragem e leitura do planímetro.

Na quarta seção fizemos um estudo analítico envolvendo geometria analítica e cálculo diferencial e integral para obter uma relação entre o planímetro polar e o Teorema de Green. Inicialmente tratamos de apresentar alguns pré-requisitos matemáticos para a compreensão do referido teorema, e em seguida o enunciamos e provamos. Por fim, apresentamos a relação que nos propomos.

Na quinta seção foi feita uma atividade que mostra o cálculo de uma área plana utilizando o Planímetro Polar.

2 PLANÍMETRO

Nesta seção vamos apresentar um breve histórico e como alguns autores descrevem o Planímetro Polar.

Pode-se dizer que o Planímetro é um instrumento criado por volta de 1854 pelo suíço Jakob Amsler, ele serve para calcular áreas de figuras planas limitadas, tomando como base seu perímetro. Sua utilização é importante para vários cursos do ensino superior, como Engenharias, Cartografia, Arquitetura, Desenho Técnico, Geografia, Geologia, Medicina, entre outros (FERREIRA, 2020).

O Planímetro Polar é composto essencialmente de duas hastes articuladas. A extremidade de uma delas é fixada em um ponto, chamado de pólo, em torno do qual se poderá girar o aparelho. Na extremidade da outra haste, se encontra uma ponta chamada de traçador, que percorre o perímetro das áreas a avaliar. Este traçador possui uma lente de aumento, que facilita este serviço. No encontro articulado destas duas hastes, liga-se rigidamente um tambor graduado, chamado de integrante, cujo eixo se comunica com um contador de voltas. Segundo o número de voltas dadas pelo integrante, durante o processo de se traçar o perímetro da figura, o tamanho do braço, isto é, da haste entre o integrante e o traçador, utilizado no planímetro e a escala do desenho, obtém-se a área real da superfície. O equipamento traz uma tabela para a conversão dos dados obtidos, para que a área possa ser calculada, já que esta conversão de dados é diversa de aparelho para aparelho.

Disponível em:

<<http://www.fec.unicamp.br/museuLTG/equipamentos/planimetropolar.htm>> acesso em: 12, Fevereiro de 2022.

O Planímetro é descrito da seguinte forma:

(...) é composto de dois braços de tamanhos iguais ou diferentes, com ângulo entre si de 0° a 180° . Na articulação desses braços existe uma pequena roda que gira enquanto é feito o contorno da curva na superfície. Nesta roda existe um contador que marca o número de voltas dadas por ela. Quando esta roda se move de forma perpendicular ao seu eixo, ela gira e seu movimento é registrado pelo contador (BORGES, 2011, p. 19).

Em nossa pesquisa, o Planímetro não é meramente uma ferramenta que calcula áreas planas, mas sim um instrumento capaz de oferecer conhecimento teórico-prático, não só na sua utilização, bem como, na robusta teoria matemática por trás deste simples aparelho.

Segundo Silva Júnior (2008):

(...) o planímetro como um instrumento usado para medir áreas de regiões planas limitadas. Segundo este autor, o projeto original era composto por dois braços, AB e BC, ligados pela extremidade B, como um compasso, com regulagem para formar um ângulo fixo entre 0° e 180° . A extremidade A do braço AB tem um apoio para ser fixado na superfície plana que contém a região cuja área se deseja medir, enquanto a extremidade B de AB possui uma roda com movimento de rotação perpendicular ao braço AB que se move à medida que o extremo C de BC dá uma volta sobre a linha que contorna a região. Nessa roda existe um contador de voltas que está associado à área da região.

Desde sua criação até a atualidade, o planímetro é visto como um instrumento inovador, de fácil manuseio e de grande utilidade para o conhecimento.

Depreende-se até aqui que o suíço Jakob Amsler revolucionou a forma de calcular áreas de figuras planas cujo instrumento teve importante contribuição científica para a maioria das ciências que lida com algum tipo de cálculo de áreas.

A forma de utilização juntamente com seus componentes principais faz do planímetro um instrumento interessante e simples que pode ser utilizado no cálculo mecânico de áreas.

Na figura 1 temos a ilustração de um Planímetro Polar.

Figura 1 – Planímetro Polar



Fonte: Autor

3 UTILIZAÇÃO, CALIBRAGEM E LEITURA DO PLANÍMETRO

Nesta seção vamos estudar a forma de utilização, calibragem e leitura do Planímetro Polar.

3.1 UTILIZAÇÃO

De acordo com Scartazzini e col. (2005) o planímetro calcula áreas de figuras planas, percorrendo o entorno de uma figura sempre no sentido horário, obtendo-se o respectivo valor das unidades planimétricas lidas diretamente no visor do instrumento correspondente.

Para utilizar eficientemente um planímetro, deve-se observar, em primeiro lugar, que as medidas sejam efetuadas numa superfície plana e, em seguida, que os órgãos constituintes do aparelho estejam dispostos de forma a fornecer valores, os mais exatos possíveis (MELO e DE SEIXAS, 2012, P. 002).

O planímetro opera através do movimento de uma roda de medição, a qual está em contato físico com a superfície do mapa ou desenho. A descrição dos planímetros polares que operam através do princípio de que uma marca ou ponto de traçamento é movido sobre o perímetro da área a ser medida e durante esta operação, os movimentos da roda de medição são registrados numa escala. A medida da área de uma parcela é completada quando percorremos todo o perímetro de uma figura (GANTZEL, 1990, p. 35).

A utilização do planímetro, segundo Ferreira (2020), é dividida basicamente em cinco etapas básicas como podemos ver na citação abaixo.

1. Escolha e marque um ponto sobre a curva limitadora da figura para iniciar a medição;
2. Coloque o ponto central da lupa da haste traçadora sobre o ponto escolhido no item anterior;
3. Fixe a agulha do polo da haste polar em um ponto qualquer da mesa que seja, preferencialmente, fora da superfície a ser percorrida de forma que o traçador consiga percorrer todo seu perímetro;
4. Zere o contador apertando o pino de zeragem do mesmo ou anote o valor da leitura inicial do contador, nesse caso, o resultado final será a subtração da leitura final pela leitura inicial;
5. "Percorra o traçador ao longo do perímetro da figura, no sentido horário,

ate retornar a sua posição inicial” (FERREIRA, 2020. p.38).

Os componentes do planímetro começam com duas hastes ou braços metálicos, os quais são articulados através de um pivô. O comprimento deste braço é constante. A segunda haste, denominada de haste principal ou traçadora, contém a marca de traçamento, que é também uma ponta de aço ou uma lente de aumento com uma marca ao centro, os quais são utilizados para percorrer o perímetro da área a ser medida no mapa. As hastes podem ser desprendidas uma da outra, no pivô. Dessa maneira, a haste polar pode ser colocada tanto no lado esquerdo como no lado direito da haste traçadora (GANTZEL, 1990. p. 36).

Na figura 2 temos a ilustração de um Receptáculo.

Figura 2 – Receptáculo



Fonte: (FERREIRA, 2020)

3.2 CALIBRAGEM

Segure o planímetro pelo corpo levantando sua parte inferior, verifique se ambas as travas estão soltas para que possa movimentar o braço e escolher dois tamanhos de acordo com a tabela de calibragem, o processo de calibração começa pela parte inteira para travar a primeira trava e fazer o ajuste fino e em seguida travar a segunda trava.

Na figura 3 temos a ilustração de uma Tabela de Calibragem.

Figura 3 – Tabela de Calibragem

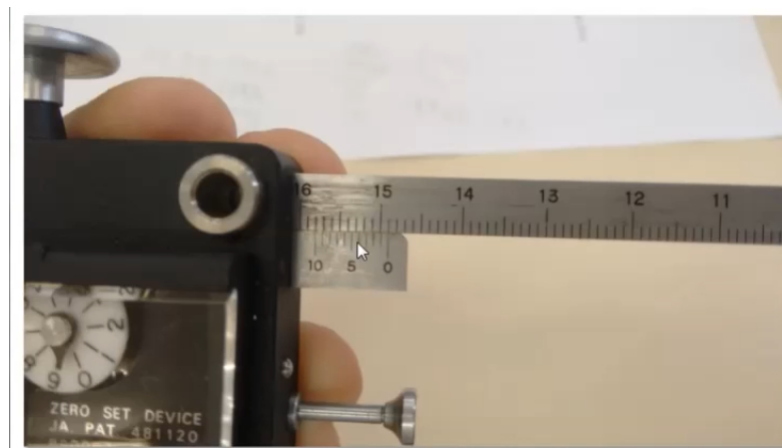
Scales	Position of Measuring Unit	Unit area	Constant
1 : 1000	149,4	10 □m	23078
1 : 200	149.0	0.4 □m	
1 : 500	150.0	2 □m	24287
1 : 250	115.6	0.5 □m	
1 : 400	86.5	1 □m	
1 : 1000	65.5	5 □m	
1 : 500	48.8	1 □m	

Fonte: Autor

A calibragem da parte inteira é feita alinhando o zero da régua de baixo ao número inteiro da régua acima.

Na Figura 4 temos a ilustração do Alinhamento da parte inteira.

Figura 4 – Alinhamento da parte inteira

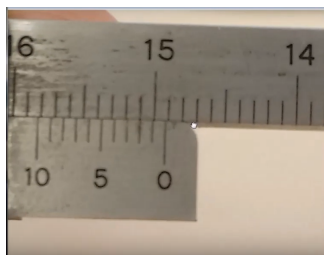


Fonte: <<https://youtu.be/2o7Ac030UxU>>

A calibragem da parte decimal é feita alinhando o traço decimal acima com o decimal da régua de baixo.

Na Figura 5 temos a ilustração do Alinhamento da parte decimal.

Figura 5 – Alinhamento da parte decimal



Fonte: <<https://youtu.be/2o7Ac030UxU>>

3.3 LEITURA

O 1º Dígito no contador em disco, observamos que o ponteiro do relógio está num intervalo entre dois números inteiros e fazemos a leitura escolhendo sempre o menor deles;

Na Figura 6 temos a ilustração do 1º dígito no Contador em Disco.

Figura 6 – Contador em Disco



Fonte: Autor

O 2º Dígito no integrante observamos que o número zero do lado esquerdo está no intervalo entre dois números inteiros e fazemos a leitura escolhendo sempre o menor deles;

Na Figura 7 temos a ilustração do 2º dígito no Integrante.

Figura 7 – Integrante



Fonte: Autor

O 3º Dígito é encontrado no integrante e fazemos a leitura contando á quantidade de traços no intervalo entre o zero do lado esquerdo e o menor numero inteiro.

Na Figura 8 temos a ilustração do 3º dígito no Integrante.

Figura 8 – Integrante



Fonte: Autor

O 4º Dígito é encontrado no integrante e fazemos a leitura observando qual traço acima do zero do lado esquerdo está mais bem alinhado.

Na Figura 9 temos a ilustração do 4º dígito no Integrante.

Figura 9 – Integrante



Fonte: Autor

Após fazer a leitura podemos fazer a conversão dos valores encontrados multiplicando o valor de acordo com o valor da escala mostrada na tabela de calibração do equipamento.

4 A MATEMÁTICA SUPERIOR ENVOLVIDA

Nesta seção iremos apresentar e demonstrar o teorema de Green e obter, na sequência, uma relação entre o referido teorema e o planímetro polar.

4.1 DEFINIÇÕES

Segundo Borges (2011, p. 04) as definições que veremos a seguir serão necessárias para melhor embasar o entendimento sobre o Teorema de Green.

Definição 4.1.1. *Uma curva plana C é um conjunto de pares ordenados da forma:*

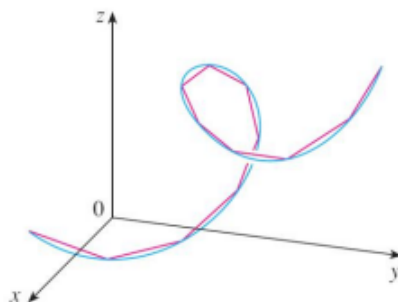
$$R(t) = (f(t), g(t)) = f(t)i + g(t)j, t \in I.$$

Vamos considerar $x = f(t)$ e $y = g(t)$, as equações paramétricas.

Definição 4.1.2. *Uma curva plana é suave se as derivadas de f' e g' existem, são contínuas e não se anulam simultaneamente em I .*

Na Figura 10 temos a ilustração de uma curva suave.

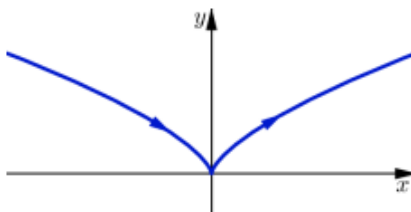
Figura 10 – Curva Suave



Fonte: http://www.im.ufrj.br/flavia/mac128/aulas/mac128_2019_10_9.pdf

Na Figura 11 temos a ilustração de uma curva não suave.

Figura 11 – Curva não Suave



Fonte: <https://www.professores.uff.br/katiafrensel/wp-content/uploads/sites/115/delightful-downloads/2019/09/gdif.pdf>

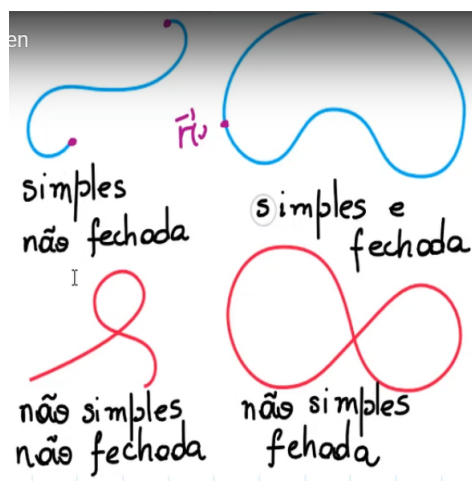
Definição 4.1.3. Uma curva C é chamada de simples, se não possuem auto-interseções, isto é, se $R(t_1) \neq R(t_2) \forall t_1, t_2 \in I$.

Definição 4.1.4. Uma curva C definida em um intervalo $I = [a, b]$ é dita fechada se o ponto inicial $(f(a), g(a))$ coincide com o ponto final $(f(b), g(b))$.

Uma circunferência e uma elipse são exemplos de figuras fechadas. Note que também são simples.

Na Figura 12 temos a ilustração de alguns tipos de Curvas.

Figura 12 – Tipos de Curvas

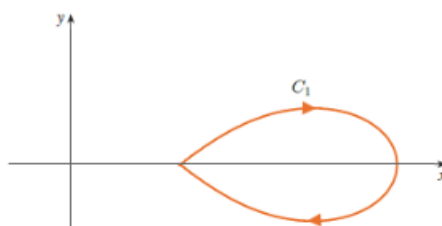


Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=dtRFYjS1-R0>

Definição 4.1.5. Uma curva fechada simples parcialmente suave é uma curva fechada formada pela união finita de curvas C_k tais que essas curvas são simples e suaves.

Na Figura 13 temos a ilustração de uma Curva Parcialmente Suave.

Figura 13 – Curva Parcialmente Suave



Fonte: <http://www2.ime.unicamp.br/ma211/Listas/Lista12.pdf>

Definição 4.1.6. *Um campo vetorial F em duas dimensões é uma função cujo domínio D é um subconjunto de \mathbb{R}^2 e cujo contradomínio é um subconjunto do espaço dos vetores bidimensionais. Se (x, y) está em D , então; $F(x, y) = M(x, y)i + N(x, y)j$ onde $M, N : D \rightarrow \mathbb{R}$ são funções escalares.*

Exemplo 4.1.1. *Considere um campo definido por $F(x, y) = 2xi + 4yj$. Esboçamos alguns vetores deste campo e em seguida mostramos na Figura 14 uma visualização geométrica desses vetores:*

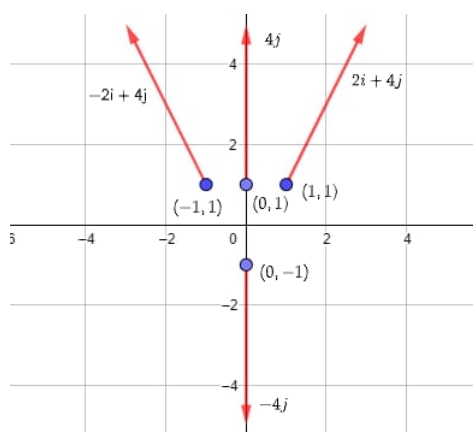
$$F(-1, 1) = -2i + 4j;$$

$$F(1, 1) = 2i + 4j;$$

$$F(0, 1) = 4j;$$

$$F(0, -1) = -4j.$$

Figura 14 – Vetores do Campo Vetorial F



Fonte: Autor

Apresentaremos agora a definição de integral curvilínea de uma função vetorial bidimensional de uma figura plana.

Definição 4.1.7. *Seja C uma curva contida em um disco aberto B em R^2 e tendo a equação vetorial $R(t) = f(t)i + g(t)j$, $a \leq t \leq b$ tal que f' e g' sejam contínuas em $[a, b]$. Seja F um campo vetorial em B definido por $F(x, y) = M(x, y)i + N(x, y)j$, onde M e N são contínuas em B . Então, a integral curvilínea de $F(x, y)$ sobre C é dada por:*

$$\int_{C_1} F dr = \int_c M(x, y)dx + N(x, y)dy = \int_a^b [M(f(t), g(t))f'(t) + N(f(t), g(t))g'(t)]dt. \quad (4.1)$$

A exposição das definições acima servem de base para o entendimento da próxima subseção, que fala do Teorema de Green.

4.2 O TEOREMA DE GREEN

O teorema que expressa uma integral dupla sobre uma região plana R em termos de uma integral de linha ao longo de uma fronteira de R é chamado Teorema de Green. Em homenagem ao matemático e físico inglês George Green (1793-1841). Seguindo as explicações de Borges (2011, p. 08), vamos refazer a demonstração mostrada por ela de uma forma que deixe mais claro alguns passos que podem ter ficado obscuros para o entendimento de algum leitor mais iniciante.

Teorema 4.2.1. *Seja C uma curva fechada simples parcialmente suave e R a região que consiste de C e seu interior. Se M e N são funções reais de duas variáveis contínuas com derivadas parciais primeiras contínuas em toda uma região aberta D contendo R então:*

$$\int_C M(x, y)dx + N(x, y)dy = \int \int_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA. \quad (4.2)$$

Demonstração. Demonstraremos inicialmente o teorema para uma região simples R que é simultaneamente dos tipos:

$$R = \{(x, y); a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\} \quad (4.3)$$

$$R = \{(x, y); c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\} \quad (4.4)$$

onde as funções g_1, g_2, h_1, h_2 são suaves. Basta provarmos as seguintes igualdades:

$$\int_C M(x, y)dx = - \int \int_R \left(\frac{\partial M}{\partial y} \right) dA \quad (4.5)$$

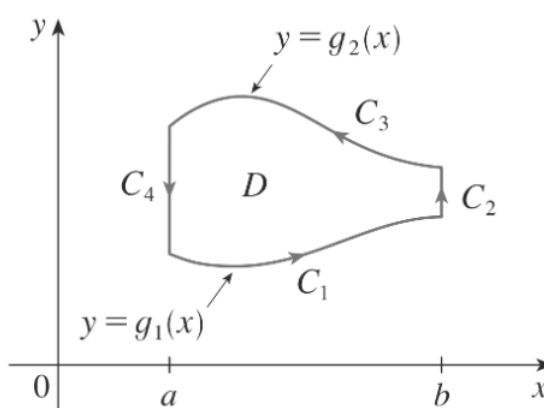
$$\int_C N(x, y)dy = \int \int_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} \right) dA \quad (4.6)$$

e soma-las membro a membro de modo a obter a equação 4.2.

Para provar a Equação 4.5, considere C uma curva fechada simples no plano xy e R a região limitada por C e suponha que M, N e suas derivadas parciais primeiras sejam contínuas em todos os pontos de uma região aberta que contenha C e R , tal que 4.3 seja o conjunto R . Note que, a curva C consiste em duas curvas C_1 e C_2 de equações $y = g_1(x)$ e $y = g_2(x)$, respectivamente.

Na Figura 15 temos a ilustração das curvas C_1, C_2 .

Figura 15 – Curvas C_1, C_2



Fonte: <https://www.ime.unicamp.br/valle/Teaching/MA211/Aula20.pdf?msclkid=4165f4f1a92a11ec8dceef27dbf6d0c4>

A integral curvilínea $\int_C M(x, y)dx$ pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \int_C M(x, y)dx &= \int_{C_1} M(x, y)dx + \int_{C_2} M(x, y)dx \\ &= \int_a^b M(x, g_1(x))dx + \int_b^a M(x, g_2(x))dx \\ &= \int_a^b [M(x, g_1(x)) - M(x, g_2(x))]dx \end{aligned}$$

Por outro lado, considerando a integral dupla

$$- \int \int_R \frac{\partial M}{\partial y} dA,$$

obtemos:

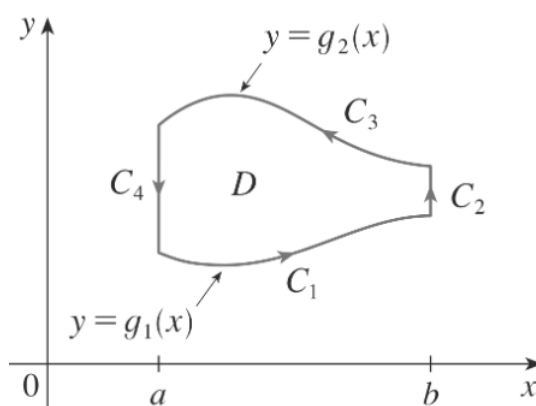
$$\begin{aligned} - \int \int_R \frac{\partial M}{\partial y} dA &= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y}(x, y) dy dx \\ &= - \int_a^b M(x, y) \Big|_{g_1(x)}^{g_2(x)} dx \\ &= - \int_a^b [M(x, g_2(x)) - M(x, g_1(x))] dx \\ &= \int_a^b [M(x, g_1(x)) - M(x, g_2(x))] dx. \end{aligned}$$

Comparando as expressões obtidas em $\int_C M(x, y)dx$ e $- \int \int_R \frac{\partial M}{\partial y} dA$, temos 4.5.

Provemos a seguir a veracidade da Equação 4.6. De modo similar a obtenção da 4.5, considerando a curva C decomposta em duas curvas orientadas $C_3 : x = h_1(y)$ e $C_4 : x = h_2(y)$. Sabemos que $C = C_3 \cup C_4$.

Na Figura 16 temos a ilustração das curvas C_3, C_4 .

Figura 16 – Curvas C_3, C_4



Fonte: <https://www.ime.unicamp.br/valle/Teaching/MA211/Aula20.pdf?msckid=4165f4f1a92a11ec8dceef27dbf6d0c4>

Então, podemos escrever a integral $\int_C N(x, y)dy$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \int_C N(x, y)dy &= \int_{C_3} N(x, y)dy + \int_{C_4} N(x, y)dy \\ &= \int_d^c N(h_1(y), y)dy + \int_c^d N(h_2(y), y)dy \\ &= \int_c^d [N(h_2(y), y) + N(h_1(y), y)]dy. \end{aligned}$$

Vamos considerar agora a integral dupla $\int \int_R \frac{\partial N}{\partial x} dA$ onde R é definida por 4.4, então:

$$\begin{aligned} \int \int_R \frac{\partial N}{\partial x} dA &= \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) dx dy \\ &= \int_c^d N(x, y) \Big|_{h_1(y)}^{h_2(y)} dy \\ &= \int_c^d [N(h_2(y), y) - N(h_1(y), y)] dy. \end{aligned}$$

Comparando a expressão obtida de $\int \int_R \frac{\partial N}{\partial x} dA$ com a obtida de $\int_C N(x, y)dy$, segue que a igualdade (4.6) é válida. Adicionando os termos correspondentes das igualdades (4.5) e (4.6), obtemos a equação (4.2):

$$\int_C M(x, y)dx + N(x, y)dy = \int \int_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA.$$

como queríamos demonstrar. □

4.3 UMA RELAÇÃO ENTRE O PLANÍMETRO POLAR E O TEOREMA DE GREEN

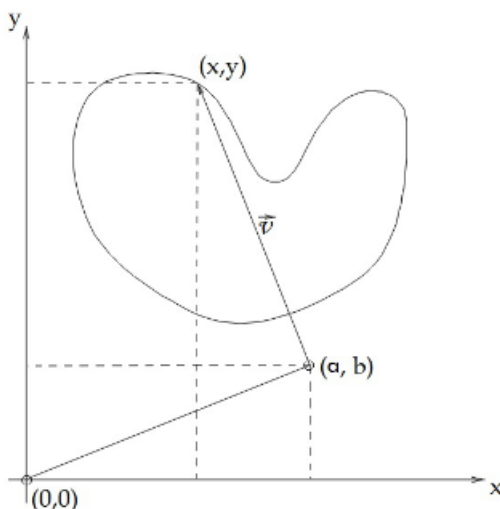
Nesta seção vamos apresentar uma atividade que mostra uma relação entre o Planímetro Polar e o Teorema de Green. As ideias que iremos apresentar podem ser vista em (FERREIRA, 2020. P. 41).

Considerando que as hastes do Planímetro tenham medidas iguais a r , uma com centro na origem $(0,0)$ e outra em um ponto (a, b) , conforme figura 17. Seja \vec{v} o vetor que representa a haste traçadora do planímetro e \vec{w} um vetor perpendicular a ele.

Vamos mostrar que ao aplicarmos o Teorema de Green no Planímetro, a constante de multiplicação da área dependerá somente do comprimento das hastes.

Como $\vec{v} = (x - a, y - b)$ e \vec{w} é perpendicular \vec{v} temos que: $\vec{w} = (-(y - b), (x - a))$

Figura 17 – Hastes centradas em $(0,0)$ e (a,b) .



Fonte: (FERREIRA.L.S.L.L.F, 2020)

Segue que, $\|\vec{v}\| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$. e $\|\vec{w}\| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$. e $\|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| = r$. Assim, o campo F será dado por: $F = \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} = \left(\frac{-(y-b)}{r}, \frac{x-a}{r}\right)$. Determinaremos a e b , partindo do sistema linear formado pelas equações da circunferência descrita pelas hastes do planímetro. Assim,

$$a^2 + b^2 = r^2 \tag{4.7}$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \tag{4.8}$$

Tomando a Equação 4.8, vamos isolar b .

$$\begin{aligned}
 (x - a)^2 + (y - b)^2 &= r^2 \\
 x^2 + y^2 + a^2 + b^2 - 2xa - 2yb &= r^2 \\
 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xa - 2yb + r^2 &= r^2 \\
 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xa - 2yb &= 0 \\
 \Leftrightarrow x^2 + y^2 &= 2xa + 2yb \\
 \Leftrightarrow x^2 + y^2 &= 2(xa + yb) \\
 \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2}{2y} &= \frac{2(xa + yb)}{2y} \\
 \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2}{2y} &= \frac{xa}{y} + b \\
 \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2}{2y} - \frac{xa}{y} &= b \\
 \Leftrightarrow b &= \frac{x^2 + y^2 - 2ax}{2y}
 \end{aligned}$$

Tomando a equação 4.7 e substituindo o valor de b encontrado na equação 4.8 temos:

$$\begin{aligned}
 a^2 + b^2 &= r^2 \\
 \Leftrightarrow a^2 + \left(\frac{x^2 + y^2 - 2ax}{2y} \right)^2 &= r^2 \\
 \Leftrightarrow a^2 + \frac{(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2)2ax + (2ax)^2}{4y^2} &= r^2 \\
 \Leftrightarrow a^2 + \frac{(x^2 + y^2)^2 - 4ax(x^2 + y^2) + 4a^2x^2}{4y^2} &= r^2 \\
 \Leftrightarrow \frac{4y^2a^2 + (x^2 + y^2)^2 - 4ax(x^2 + y^2) + 4a^2x^2}{4y^2} &= r^2 \\
 \Leftrightarrow 4y^2a^2 + (x^2 + y^2)^2 - 4ax(x^2 + y^2) + 4a^2x^2 &= 4y^2r^2 \\
 \Leftrightarrow 4y^2a^2 + (x^2 + y^2)^2 - 4ax(x^2 + y^2) + 4a^2x^2 - 4y^2r^2 &= 0 \\
 \Leftrightarrow 4a^2y^2 + 4x^2a^2 + (x^2 + y^2)^2 - 4xa(x^2 + y^2) - 4y^2r^2 &= 0 \\
 \Leftrightarrow 4a^2(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2)^2 - 4xa(x^2 + y^2) - 4y^2r^2 &= 0.
 \end{aligned}$$

Fazendo, $x^2 + y^2 = R^2$ obtemos as equivalências:

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 4a^2R^2 - 4axR^2 + R^4 - 4y^2r^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow 4R^2(a^2 - ax) + R^4 - 4y^2r^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow a^2 - ax = \frac{4y^2r^2 - R^4}{4R^2} \\
&\Leftrightarrow a^2 - ax + \frac{-4y^2r^2 + R^4}{4R^2} = 0.
\end{aligned}$$

Observe que chegamos a uma função de segundo grau onde “a” é uma variável e “x” é constante. Aplicando a fórmula $L = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$ obtemos as raízes que serão as coordenadas a e b que procuramos.

$$\begin{aligned}
\Delta &= B^2 - 4AC \\
&= x^2 - 4 \left(\frac{-4r^2y^2 + R^4}{4R^2} \right) \\
&= x^2 + \left(\frac{16r^2y^2 - 4R^4}{4R^2} \right) \\
&= \frac{4x^2R^2 + 16r^2y^2 - 4R^4}{4R^2} \\
&= \frac{x^2R^2 + 4r^2y^2 - R^4}{R^2}.
\end{aligned}$$

Segue que:

$$a = \frac{x + \sqrt{\frac{x^2R^2 + 4r^2y^2 - R^4}{R^2}}}{2},$$

e

$$\begin{aligned}
a &= \frac{x + \sqrt{\frac{x^2 R^2 + 4r^2 y^2 - R^4}{R^2}}}{\sqrt{4}}, \\
\Leftrightarrow a &= \frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x^2 R^2 + 4y^2 r^2 - R^4}{4}} \\
\Leftrightarrow a &= \frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x^2 R^2 + 4y^2 r^2 - R^4}{4R^2}} \\
\Leftrightarrow a &= \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x^2 R^2 + 4y^2 r^2 - R^4}}{2R} \\
\Leftrightarrow a &= \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x^2(x^2 + y^2) + 4y^2 r^2 - (x^2 + y^2)^2}}{2R} \\
\Leftrightarrow a &= \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x^4 + x^2 y^2 + 4y^2 r^2 - (x^4 + 2x^2 y^2 + y^4)}}{2R} \\
\Leftrightarrow a &= \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x^4 + x^2 y^2 + 4y^2 r^2 - x^4 - 2x^2 y^2 - y^4}}{2R} \\
\Leftrightarrow a &= \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{-y^4 - x^2 y^2 + 4y^2 r^2}}{2R} \\
\Leftrightarrow a &= \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{y^2(4r^2 - y^2 - x^2)}}{2R} \\
\Leftrightarrow a &= \frac{x}{2} + y \frac{\sqrt{4r^2 - x^2 - y^2}}{2R} \\
\Leftrightarrow a &= \frac{x}{2} + \frac{y \sqrt{4r^2 - (x^2 + y^2)}}{\sqrt{(R^2)}} \\
\Leftrightarrow a &= \frac{x}{2} + \frac{y}{2} \sqrt{\frac{4r^2 - (x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}} \\
\Leftrightarrow a &= \frac{x}{2} + \frac{y}{2} \sqrt{\frac{4r^2}{x^2 + y^2} - 1}.
\end{aligned}$$

Tomando a equação 4.8 vamos isolar a .

Então, temos:

$$\begin{aligned}
 & (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \\
 \Leftrightarrow & x^2 - 2xa + a^2 + y^2 - 2yb + b^2 = r^2 \\
 \Leftrightarrow & x^2 + y^2 - 2xa - 2yb + a^2 + b^2 = r^2 \\
 \Leftrightarrow & x^2 + y^2 - 2xa - 2yb + r^2 = r^2 \\
 \Leftrightarrow & x^2 + y^2 - 2xa - 2yb = 0 \\
 \Leftrightarrow & x^2 + y^2 = 2xa + 2yb \\
 \Leftrightarrow & \frac{x^2 + y^2}{2x} = \frac{2xa + 2yb}{2x} \\
 \Leftrightarrow & \frac{x^2 + y^2}{2x} = \frac{yb}{x} + a \\
 \Leftrightarrow & a = \frac{x^2 + y^2}{2x} - \frac{yb}{x} \\
 \Leftrightarrow & a = \frac{x^2 + y^2 - 2yb}{2x}.
 \end{aligned}$$

Tomando a equação 4.7 e substituindo o valor de a encontrado na equação 4.8 temos:

$$\begin{aligned}
 & a^2 + b^2 = r^2 \\
 \Leftrightarrow & \left(\frac{x^2 + y^2 - 2by}{2x} \right)^2 + b^2 = r^2 \\
 \Leftrightarrow & \frac{(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2)2by + 4b^2y^2}{4x^2} + b^2 = r^2 \\
 \Leftrightarrow & \frac{(x^2 + y^2)^2 - 4by(x^2 + y^2) + 4b^2y^2 + 4x^2b^2}{4x^2} + b^2 = r^2 \\
 \Leftrightarrow & (x^2 + y^2)^2 - 4by(x^2 + y^2) + 4b^2y^2 + 4x^2b^2 = 4x^2r^2 \\
 \Leftrightarrow & (x^2 + y^2)^2 - 4by(x^2 + y^2) + 4b^2(x^2 + y^2) - 4x^2r^2 = 0
 \end{aligned}$$

Fazendo $x^2 + y^2 = R^2$, temos:

$$\begin{aligned}
 & a^2 + b^2 = r^2 \\
 \Leftrightarrow & R^4 - 4byR^2 + 4b^2R^2 - 4x^2r^2 = 0 \\
 \Leftrightarrow & R^4 + 4R^2(b^2 - by) - 4x^2r^2 = 0 \\
 \Leftrightarrow & b^2 - by = \frac{4x^2r^2 - R^4}{4R^2} \\
 \Leftrightarrow & b^2 - by - \left(\frac{4x^2r^2 - R^4}{4R^2} \right) = 0 \\
 \Leftrightarrow & b^2 - by - \frac{4x^2r^2 + R^4}{4R^2} = 0.
 \end{aligned}$$

Aplicando a formula $L = -B \pm \frac{\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$ obtemos as raízes como podemos ver abaixo:

$$\begin{aligned}\Delta &= B^2 - 4AC \\ &= y^2 - 4 \left(\frac{-4r^2x^2 + R^4}{4R^2} \right) \\ &= y^2 + \left(\frac{16x^2r^2 - 4R^4}{4R^2} \right) \\ &= \frac{4R^2y^2 + 16x^2r^2 - 4R^4}{4R^2} \\ &= \frac{R^2y^2 + 4x^2r^2 - R^4}{R^2}.\end{aligned}$$

Segue que:

$$b = y + \frac{\sqrt{\frac{y^2R^2+4r^2x^2-R^4}{R^2}}}{2},$$

e então,

$$\begin{aligned}b &= y + \frac{\sqrt{\frac{y^2R^2+4r^2x^2-R^4}{R^2}}}{\sqrt{4}}, \\ &= \frac{y}{2} + \sqrt{\frac{R^2y^2 + 4x^2r^2 - R^4}{4R^2}} \\ &= \frac{y}{2} + \frac{\sqrt{R^2y^2 + 4x^2r^2 - R^4}}{2R} \\ &= \frac{y}{2} + \frac{\sqrt{(x^2 + y^2)y^2 + 4x^2r^2 - (x^2 + y^2)^2}}{2R} \\ &= \frac{y}{2} + \frac{\sqrt{y^2x^2 + y^4 + 4x^2r^2 - x^4 - 2y^2x^2 - y^4}}{2R} \\ &= \frac{y}{2} + \frac{\sqrt{4x^2r^2 - y^2x^2 - x^4}}{2R} \\ &= \frac{y}{2} + \frac{\sqrt{x^2(4r^2 - x^2 - y^2)}}{2R} \\ &= \frac{y}{2} + x \frac{\sqrt{4r^2 - (x^2 + y^2)}}{\sqrt{4R^2}} \\ &= \frac{y}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{\frac{4r^2 - (x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}} \\ &= \frac{y}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{\frac{4r^2}{x^2 + y^2} - 1}.\end{aligned}$$

Usando os valores de a e b , temos que o campo do Planímetro será dado por:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{-1}{r}(y - b) \\ &= \frac{1}{r}(-y + b) \\ &= \frac{1}{r} \left(-y + \frac{y}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{\frac{4r^2}{x^2 + y^2} - 1} \right) \\ &= \frac{1}{r} \left(\frac{-y}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{\frac{4r^2}{x^2 + y^2} - 1} \right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \frac{1}{r}(x - a) \\ &= \frac{1}{r} \left[x - \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2} \sqrt{\frac{4r^2}{x^2 + y^2} - 1} \right) \right] \\ &= \frac{1}{r} \left[\left(x - \frac{x}{2} \right) + \frac{y}{2} \sqrt{\frac{4r^2}{x^2 + y^2} - 1} \right] \\ &= \frac{1}{r} \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2} \sqrt{\frac{4r^2}{x^2 + y^2} - 1} \right). \end{aligned}$$

Derivando o campo do Planímetro, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{-1}{2} + \frac{x}{2} \frac{1}{2\sqrt{\frac{4r^2}{x^2 + y^2} - 1}} \left(\frac{-8r^2 y}{(x^2 + y^2)^2} \right) \\ &= \frac{-1}{2} + \frac{x}{4} \left(\frac{-8r^2 y}{(x^2 + y^2)^2 \sqrt{\frac{4r^2}{x^2 + y^2} - 1}} \right) \\ &= \frac{-1}{2} + \frac{8r^2 y x}{-4(x^2 + y^2)^2 \sqrt{\frac{4r^2}{x^2 + y^2} - 1}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{1}{2} + \frac{y}{2} \frac{1}{2\sqrt{\frac{4r^2}{x^2 + y^2} - 1}} \left(\frac{-8r^2 x}{(x^2 + y^2)^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{8r^2 y x}{-4(x^2 + y^2)^2 \sqrt{\frac{4r^2}{x^2 + y^2} - 1}}. \end{aligned}$$

Fazendo a subtração das derivadas do campo do planímetro temos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) &= \frac{1}{2} - \frac{8r^2 y x}{4(x^2 + y^2)^2 \sqrt{\frac{4r^2}{x^2 + y^2} - 1}} + \frac{1}{2} + \frac{8r^2 y x}{4(x^2 + y^2)^2 \sqrt{\frac{4r^2}{x^2 + y^2} - 1}}, \\ \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) &= \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

Notamos, então, que ao aplicarmos o Teorema de Green no Planímetro, a constante de multiplicação da área dependerá somente do comprimento das hastes, isto é,

$$\begin{aligned} \int_C f(x, y)dx + g(x, y)dy &= \int \int_R \left(\frac{\theta g}{\theta x} - \frac{\theta f}{\theta y} \right) dA \\ &= \int \int_R \frac{1}{r} dA \\ &= \frac{1}{r} \int \int_R dA \\ &= \frac{1}{r} A(R). \end{aligned}$$

O que implica que o funcionamento do Planímetro depende do comprimento das hastes r , do diâmetro do tambor d e da quantidade de voltas k do tambor que é indicada pelo disco contador. Logo, o campo determinado pelo Planímetro é $F(x, y) = (f, g)$. Como indica (PEREIRA; VITOR; OLIVEIRA. 2020.p.79 a 83),

$$K\pi.d = \int_C f(x, y)dx + g(x, y)dy = \frac{1}{r}.A(R)$$

, isto é, a área cercada por C é igual a $k\pi.dr$.

5 ATIVIDADE UTILIZANDO O PLANÍMETRO POLAR

Nesta seção vamos apresentar uma atividade utilizando o Planímetro Polar, iremos calcular a área de uma região do Parque Anauá localizado na cidade de Boa Vista, RR.

5.1 ATIVIDADE 1

Vamos calcular a área tracejada da Figura 18:

Vamos calcular a área utilizando à escala 1 : 1000 da Tabela de calibragem e o tamanho do braço será o de 149, 4.

Figura 18 – Parque Anauá na Cidade de Boa Vista, RR.



Fonte: <<https://google-earth>>

Solução,

Utilizando os procedimento de Ferreira (2020).

Escolhemos um ponto na parte de baixo da Figura mas precisamente o ponto logo abaixo desse circulo verde.

Colocamos o ponto central da lupa da haste traçadora sobre o ponto escolhido no item anterior.

Fixamos a agulha do polo da haste polar em um ponto da mesa que seja, preferencialmente, fora da superfície a ser percorrida de forma que o traçador consiga percorrer todo seu perímetro.

Zeramos o contador apertando o pino de zeragem do equipamento.

Percorremos com a lupa da haste traçadora o perímetro da figura, no sentido horário, ate retornar a sua posição inicial”.

Em seguida fizemos a leitura do aparelho.

O 1º dígito no Contador em Disco, observamos que o ponteiro do relógio está num intervalo entre dois números inteiros e fazemos a leitura escolhendo sempre o menor deles.

Na figura 19 temos a ilustração do 1º dígito.

Figura 19 – 1º Dígito



Fonte: Autor

O 2º dígito no integrante observamos que o número zero do lado esquerdo está no intervalo entre dois números inteiros e fazemos a leitura escolhendo sempre o menor deles.

Na figura 20 temos a ilustração do 2º dígito.

Figura 20 – 2º Dígito

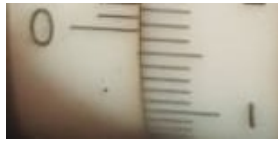


Fonte: Autor

O 3º dígito é encontrado no integrante e fazemos a leitura contando a quantidade de traços no intervalo entre o zero do lado esquerdo e o menor número inteiro.

Na figura 21 temos a ilustração do 3º Dígito.

Figura 21 – 3º Dígito



Fonte: Autor

O 4º dígito é encontrado no integrante e fazemos a leitura observando qual traço acima do zero do lado esquerdo está mais bem alinhado.

Na Figura 22 temos a ilustração do 4º dígito.

Figura 22 – 4º Dígito



Fonte: Autor

Como podemos verificar nas figuras encontramos os seguintes dígitos:

1º dígito: 0; 2º dígito: 1; 3º dígito: 6; 4º dígito: 6

Portanto, fazendo a multiplicação do número encontrado pela constante da Tabela de calibragem com escala 1 : 1000 temos A, ou seja:

$$A = 0166 \times 10 = 1660m^2$$

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em nosso trabalho apresentamos uma relação entre o planímetro polar e o Teorema de Green e depois uma aplicação prática dessa relação.

Nesta perspectiva realizar esta revisão bibliográfica é importante para o aprimoramento do conhecimento sobre o assunto.

Ao ter realizado uma revisão bibliográfica como metodologia de pesquisa sobre o tema proposto, foi necessário fazer a leitura de cada artigo científico pesquisado observando seus pontos de difícil entendimento.

Foi observado vários pontos de difícil compreensão nos artigos revisados e tentamos torná-los mais acessível a compreensão da relação existente entre o Planímetro Polar e o Teorema de Green para quem ler este trabalho.

E, por fim, em pesquisas futuras, sugere-se realizar uma revisão bibliográfica em um maior número de trabalhos científicos contribuindo assim para o enriquecimento da pesquisa.

REFERÊNCIAS

- BORGES, Gilvania Ramos. O Teorema de Green e Aplicações. Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, 2011. 39 p.
- JÚNIOR, Epitácio Pedro da Silva. O Teorema da Função Implícita em um contexto aplicado e algumas conexões no cálculo de áreas de regiões planas. Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP, 2008. 88 p.
- MELO¹, Weyller Diogo de Albuquerque; DE SEIXAS¹, Andréa. Determinação da Confiabilidade de Planímetros Digitais: Experimentos Práticos de Topografia para Cálculos de Área e de Volume. Universidade Federal de Pernambuco-UFPE, 2012 002 P
- GANTZÈL, Otto Luiz. Análise da Eficiência e Precisão das Técnicas de Medição de Áreas: Uma Simulação Florestal. Universidade Federal do Para – UFPA, 1990. 133 p.
- BRAGA, Alcimar de Sousa. O Teorema de Green e Aplicações. Universidade Católica de Brasília – UNB. 12 p.
- FERREIRA, F. A. P. S. A. et. al. O planímetro polar de Amsler no ensino de geometria. C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru, v. 19, p. 33–54, dez. 2020.
- FERNANDES, Renato de Oliveira. Cálculo de áreas. Universidade Regional do Cariri – URCA, 10 p.
- SCARTAZZINI, Luiz Sílvio; DA SILVA, Jorge Tadeu Vargas; CONSUL, Renato de Ávila. Metodologias para determinar áreas em superfícies irregulares no ensino da geometria aplicando a proporcionalidade, 2005. 06 p.
- CAMPOS, Antônio Carlos. Medições Planimétricas: precisão e generalização. 164 p.
- SISTHERENN, Claudivana; Da LUZ, Elizangela Weber. Utilização de um método prático para determinar a área de superfícies Irregulares. Instituto Federal de Santa Catarina – IFSC, 2013. 04 p.
- FERRET, Rodrigo Bozi; História e filosofia da matemática. Aracaju: Gráf. UNIT, 2007.
- PEREIRA, A. S.; VITOR, C. B.; OLIVEIRA, J. P. Cálculo II. Manaus, AM: UEA, 2007.
- Disponível em: <<http://www.passeidireto.com/arquivo/2344408/apostila—calculo-ii/17>>
- Acesso em: 24 mar. 2022.
- Disponível em:
- <<http://www.fec.unicamp.br/museuLTG/equipamentos/planimetropolar.htm>>
- Acesso em: 24, mar. 2022.
- Disponível em: <<https://google-earth>>
- Acesso em: 12 mar. 2022.
- Disponível em: <<https://>>

- www.ime.unicamp.br/valle/Teaching/MA211/Aula20.pdf?msckid=4165f4f1a92a11ec8dceef27dbf6d0c4>
Acesso em: 24 mar. 2022.
Disponível em: <<http://www2.ime.unicamp.br/ma211/Listas/Lista12.pdf>>
Acesso em: 22 mar. 2022.
Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=dtRFYjS1-R0>>
Acesso em: 20 mar. 2022.
Disponível em: <<https://www.professores.uff.br/katiafrensel/wp-content/uploads/sites/115/delightful-downloads/2019/09/gdif.pdf>>
Acesso em: 19 mar. 2022.
Disponível em: <http://www.im.ufrj.br/flavia/mac128/aulas/mac128_2019_10_9.pdf>
Acesso em: 18 mar. 2022.
Disponível em: <<https://youtu.be/2o7Ac030UxU>>
Acesso em: 10 mar. 2022.