UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA
CENTRO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
DEPARTAMANTO DE MATEMÁTICA

CLAUDENICE SOBRAL DA SILVA

SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS PARA O ENSINO DE RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NA CIRCUNFERÊNCIA: SENO E COSSENO

Boa Vista-RR
2022

CLAUDENICE SOBRAL DA SILVA

SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS PARA O ENSINO DE RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NA CIRCUNFERÊNCIA: SENO E COSSENO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como pré-requisito para a obtenção do título de Licenciada em Matemática pela Universidade Federal de Roraima.

Orientador (a): Profa. Dra. Edileusa do Socorro Valente Belo

Boa Vista-RR

2022

Dados Internacionais de Catalogação na publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal de Roraima

S586s Silva, Claudenice Sobral da.
Sequências didáticas para o ensino de razões trigonométricas na circunferência : seno e cosseno / Claudenice Sobral da Silva. – Boa Vista, 2022.
76 f. : il.

Orientadora: Profa. Dra. Edileusa do Socorro Valente Belo.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) - Universidade Federal de Roraima, Curso de Matemática.

1 - Sequências didáticas. 2 - Razões trigonométricas. 3 - Seno. 4 - Cosseno. 5 - Formação do professor de matemática. I - Título. II - Belo, Edileusa do Socorro Valente (orientadora).

CDU - 541.11.6

Ficha Catalográfica elaborada pela Bibliotecária/Documentalista:
Maria de Fátima Andrade Costa - CRB-11/453-AM

CLAUDENICE SOBRAL DA SILVA

SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS PARA O ENSINO DE RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NA CIRCUNFERÊNCIA: SENO E COSSENO

A Banca Examinadora do Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), apresentado junto ao Departamento de Matemática da UFRR, pré-requisito para a obtenção do título de Licenciada em Matemática, realizado sob orientação da Professora Dra. Edileusa do Socorro Valente Belo.

Parecer: Aprovado

Data de aprovação: 16/03/2022

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Edileusa do Socorro Valente Belo
(Orientadora)

Prof. Dr. Guilherme Zsigmond Machado

Prof. Dr. Marcelo Batista de Souza

Dedico este trabalho à Deus que foi meu guia durante essa jornada, meus filhos que são meu alicerce e amigos e familiares que me apoiaram neste percurso.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus primeiramente por estar sempre presente na minha vida, meus pais, em memória meu filho Elias, meus filhos Marcos Eduardo, Paulo Victor, Laura Beatriz e Arthur Gabriel minhas estruturas essenciais para continuar, meu marido e amigo Antônio Marcos que mesmo sem condições fez o possível para nos ajudar.

A Universidade que me atribuiu apoio financeiro através de bolsas e auxílios, mesmo não sendo relevante em parte quanto sua política de obrigações, mas abriu janelas de conhecimentos permitindo vislumbrar novos horizontes.

A minha orientadora Profª Drª Edileusa do Socorro Valente Belo, que foi mais além de suas obrigações, foi humana, amiga, professora, psicóloga, doutora, mãe de certa forma, agradeço pelas orientações, incentivos, dedicações, tempo investido e experiências compartilhadas.

As minhas amigas, que se iniciou com um grupo de estudo e transformou-se em uma grande amizade Rosailda Carvalho, Vânia Dourado, Joana Dourado, Nayara Costa, e Crislene Oliveira.

Meu amigo Elias Moura que foi como pai, sempre me apoiou e ajudou no que precisava. Jaqueline Rosa minha amiga do curso de Administração, com ela aprendi ser mais organizada, meu apoio incondicional. Minha amiga Edileila Soares, que me incentivou tanto nos estudos quanto profissionalmente.

Aos Professores Alberto Martinez, Genivilce Freire, Jordânia Bernardo (*in memoriam*), Héctor Garcia, e Edileusa Belo que marcaram minha vida acadêmica por suas honrosas didáticas.

Enfim a todos que de alguma forma seja ela diretamente ou indiretamente fizeram parte da minha formação acadêmica, obrigada a todos.

RESUMO

O presente trabalho objetiva a elaboração de Sequências Didática (SD) para o ensino de Razões trigonométricas na circunferência: seno e cosseno. Trazemos o conceito de SD e como ela pode colaborar na formação do professor de matemática. Metodologicamente desenvolvemos uma pesquisa teórica, pois, aprofundamos e discutimos os conhecimentos matemáticos propondo Sequências Didáticas para o ensino de razões trigonométricas na circunferência. Concluímos trazendo 5(cinco) Sequências Didáticas sobre Circunferência trigonométrica: seno e cosseno: 1ª SD O radiano, unidade de medida de arco e de ângulo; 2ª SD Arcos trigonométricos, arcos côngruos, associando números reais aos pontos da circunferência; 3ª SD Simetria; 4ª SD Seno e cosseno de um arco trigonométrico, e; 5ª SD Redução ao 1º quadrante e Relação fundamental da trigonometria. A construção das sequências didáticas no ensino de trigonometria para a 2ª série do Ensino Médio teve um papel importante, pois proporcionou a esta futura professora organização pedagógica, manuseio de recursos didáticos, como o GeoGebra, o planejamento do tempo estimado para cada aula, conhecimento da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), enfim ferramentas indispensáveis para formação do professor de matemática, que em prática realiza uma reflexão antes e depois de seu desenvolvimento.

Palavras-chave: Sequências Didáticas, Razões Trigonométricas, Seno, Cosseno, Formação do Professor de Matemática.

ABSTRACT

The present work aims at the elaboration of Didactic Sequences (SD) for the teaching of trigonometric ratios in the circumference: sine and cosine. We bring the concept of SD and how it can collaborate in the formation of the mathematics teacher. Methodologically we developed a theoretical research, therefore, we deepened and discussed the mathematical knowledge proposing Didactic Sequences for the teaching of trigonometric ratios in the circumference. We conclude by bringing 5 (five) Didactic Sequences on Trigonometric Circumference: sine and cosine: 1st SD The radian, unit of measurement of arc and angle; 2nd SD Trigonometric arcs, congruent arcs, associating real numbers to the points on the circumference; 3rd SD Symmetry; 4th SD Sine and cosine of a trigonometric arc, and; 5th SD Reduction to the 1st quadrant and Fundamental relation of trigonometry. The construction of didactic sequences in the teaching of trigonometry for the 2nd grade of High School played an important role, as it provided this future teacher with pedagogical organization, handling of didactic resources, such as GeoGebra, the planning of the estimated time for each class, knowledge of the National Common Curricular Base (BNCC), in short, indispensable tools for the training of mathematics teachers, who in practice carry out a reflection before and after their development.

Keywords: Didactic Sequences, Trigonometric Ratios, Sine, Cosine, Mathematics Teacher Training.

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Neste trabalho exibiremos a construção de Sequências Didáticas para razões trigonométricas na circunferência: seno e cosseno, referente a turma da 2ª série do Ensino Médio, seguindo as orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) priorizando a temática e habilidades desenvolvida em cada etapa da construção com aprofundamento do conteúdo abordado.

Iniciaremos o capítulo 1, com o Percurso de vida e formação da autora, por conseguinte no capítulo 2, trataremos dos aspectos teóricos que objetivam discutir o conceito de Sequência Didática, a importância para formação do professor de Matemática, e, conceitos matemáticos sobre circunferência trigonométrica: seno e cosseno. No capítulo 3, trazemos a Metodologia da pesquisa, referindo-nos a BNCC do Ensino Médio, no que concerne as competências e habilidades esperadas para o ensino e aprendizagem dos conteúdos que são o foco deste trabalho: as razões trigonométricas na circunferência para Seno e Cosseno; delimitamos quais SD construir. Este capítulo também apresentará uma estrutura modelo para uma SD.

No capítulo 4 desenvolvemos 5(cinco) SD a primeira SD aborda o conceito de radiano, unidade de medida de arco e de ângulo, a segunda SD refere-se a arcos trigonométricos, arcos côngruos, e associando números reais aos pontos da circunferência, na terceira SD trata-se de Simetria, a quarta SD sobre Seno e cosseno de um arco trigonométrico, e quinta SD sobre Redução ao 1º quadrante e Relação fundamental da trigonometria. Finalizamos com as considerações finais objetivando trabalho e a elaboração da pesquisa para o ensino de trigonometria na circunferência.

1. O PERCURSO ATÉ A LICENCIATURA

Desde quando iniciei os estudos tive o incentivo da minha mãe, que apesar de ter concluído apenas o 1º grau, e ser bastante rígida com os estudos, sempre dialogava esclarecendo que estudo seria um investimento do tempo presente com vista ao futuro. O Ensino Fundamental e Médio cursei em escolas públicas, pois éramos muitos irmãos e o custo de vida era alto. Meu pai era motorista de embarcação, viajava muito a trabalho e não estava presente em nossa educação. Minhas séries iniciais foram na Escola Estadual Agnello Bittencourt na cidade de Manaus-AM, cheguei na escola alfabetizada, pois, minha mãe me ensinava em casa, participava das reuniões da escola e buscava estar presente em nossa educação, pois desde as primeiras séries iniciais, tinha cuidados com a minha caligrafia, leitura e tabuada, sem falar no comportamento em sala de aula. Deslocava-se com frequência à escola para averiguar sobre meu comportamento e desenvolvimento em sala de aula, me sentia oprimida em relação a isso, me prejudicando nas séries finais do Ensino Fundamental e Médio, pois minha mãe não permitia conversar com outras pessoas.

Minha família e eu mudamos para cidade de Boa Vista-RR, cursei 4ª série até a 7ª série do Ensino Fundamental na Escola Estadual Jesus Nazareno de Souza Cruz, no início fui chamada de novata pela turma e acabei sendo chacota por um longo período por causa do meu sotaque, o que me incomodava sempre. Diante desta situação criei medo de perguntar qualquer coisa ao professor e de me aproximar das pessoas, causando muitas dificuldades para me expressar. Na 8ª série precisei mudar para Escola Estadual Profª Maria Nilce Macedo Brandão, caminhava em torno de 2 km de casa até a escola todos os dias pelo período da tarde. Na 1ª série do Ensino Médio voltei para a Escola Estadual Jesus Nazareno de Souza Cruz onde piorou meu convívio social. Na época tive dificuldade em um conteúdo de Matemática pois havia faltado uma aula anterior, e na aula seguinte expus ao professor minha dúvida, mas ele foi grosso comigo dizendo que eu já deveria saber o assunto, por ser conteúdo passado e que não iria explicar novamente, acrescentando que eu poderia pegar com um colega, fiquei triste e com vergonha da turma, mas eu já tinha formulado a ideia que seria professora, pois eu gostava da matemática, e isso me incentivou ainda mais, em ser uma professora que realmente gostasse de ensinar, principalmente para um aluno que demonstre querer aprender. Me dediquei mais aos estudos, o que causou problemas familiares, me sentia excluída por meus irmãos, pois me criticavam devido a minha mãe dizer que seria o orgulho da família, pois nenhum deles queria saber de estudar.

No ano de 2000 aos 16 anos de idade fui expulsa de casa, fui morar com meu namorado, passei a trabalhar como auxiliar de cozinha em um restaurante e continuei os estudos, pegava dois ônibus para ir para a escola e dois para voltar para casa. No ano de 2001 tive meu primeiro filho com 17 nos, mas conclui a 1ª série do Ensino Médio, no ano de 2002 aos 18 anos tive meu segundo filho, e parei os estudos por dois anos, pois não tinha com quem deixá-los. Voltei para o Amazonas e no mesmo ano de 2004 conclui a 2ª série do Ensino Médio na Escola Estadual Roberto dos Santos Vieira, pegava dois transportes para ir e para voltar para casa. Mas no ano de 2005 retornei para Boa Vista-RR, pois meu pai havia adoecido e estava muito doente no hospital, e minha mãe passando por necessidades financeiras, no mesmo ano concluí a 3ª série do Ensino Médio na escola Estadual Professora Maria Nilce Macedo Brandão na modalidade de ensino de Educação de Jovens e Adultos ensino (EJA).

Em outubro de 2006 meu pai teve sua saúde comprometida e acabou falecendo, sofri muito com a perda do meu pai. No ano de 2007 tive outro filho, devido não ter condição financeira, moradia fixa, sem profissão, resolvi estudar para fazer um curso superior, com objetivo em dar um conforto melhor para os meus filhos. Estudava sozinha, em casa com livros da escola, pois não tinha condições de pagar cursinho preparatórios, me dediquei o máximo que pude até fazer a prova do vestibular e passar. No ano de 2009 comecei a fazer o curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Federal de Roraima, foi uma alegria para mim e minha família, principalmente para minha mãe. O primeiro ano foi tranquilo, mas acabei engravidando mais uma vez, desde então passei por muitos problemas. Em 2010, sem condições de pagar para que cuidassem dos meus filhos, acabei trancando o curso, após um ano retornei para UFRR. Meu trajeto se tornou longo e cansativo, saia pela manhã do bairro Jardim Caranã para o bairro Cambará de bicicleta para ensinar meus sobrinhos a ler, recebia uma ajuda de custo por isso e alguns mantimentos. Retornava as 11h da manhã para fazer almoço, tomar banho, levar os filhos para escola e depois pegar o ônibus para UFRR. Tranquei disciplina por várias vezes, desisti de outras devido o cansaço me vencer e acabava não dando conta das atividades ou faltando as aulas, perdendo conteúdo e explicações, resultando em muitas reprovações, em meios aos problemas continuei e conclui 75% do curso.

Em 2016 em pleno sábado eu precisava muito estudar para uma prova importante que seria numa segunda-feira pois já havia repetido e reprovado em Análise Real outras vezes, mas por conta do destino, meu filho mais velho veio a óbito com 15 anos de idade vítima de afogamento no rio Cauamé, não tive forças e nem ânimo para continuar, me afastei de tudo e de todos me isolando para vida. No ano 2017 resolvi dar continuidade ao curso, e no decorrer do caminho sofri um acidente de moto, passei um mês com a perna impossibilitada de andar o que me prejudicou em algumas disciplinas. Minha grade curricular foi modificada automaticamente, aumentando a carga horária a ser cumprida, em 2019 já estava passando por um processo de jubilamento, exatamente no mês de março de 2019 minha filha é acometida de uma doença grave e precisou ficar internada por 3 meses e 18 dias com diagnóstico de artrite séptica, osteomelite, e trombose vascular profunda (TVP). Nesse mesmo ano fui jubilada do curso sofri, chorei muito. Mas minha filha venceu a doença e seguiu tratamento em casa. No mesmo ano participei do ENEM 2019, e fiz a prova apenas para testar conhecimento, no ano seguinte 2020, grávida voltei a cursar Licenciatura em matemática na Universidade Federal de Roraima de forma não presencial, pois entramos em uma pandemia provocada pelo novo coronavírus que levou pessoas ao adoecimento pela COVID19, a vantagem foi aproveitar as disciplinas já cursadas anteriormente e dar prosseguimento ao curso.

O ensino se deu de forma remota (*online*), através de aplicativos com *Skype, Google Meet, Google* sala de aula, ambiente virtual de aprendizagem (AVA), Jamboard, SIGAA e grupos de *Whats App* o que foi novidade, pois tive que aprender a usar novas ferramentas de ensino durante as aulas síncronas e assíncronas. E na disciplina de Matemática para ensinar números e operações que tive o conhecimento sobre Sequências Didáticas, onde aprendi a elaborá-las despertando interesse pelo assunto.

No semestre 2021.2 retornamos presencialmente com limitações de aulas para segurança de todos e mantendo os devidos cuidados, mesmo acreditando que este ainda não seria o melhor momento para retornar as atividades presenciais, mas enfim agora redigindo meu TCC sobre Sequências didáticas para razões trigonométricas na circunferência: seno e cosseno, para apresentação, avaliação e conclusão deste curso, pois a Matemática sempre foi o que quis fazer, mesmo com tropeços e dificuldades nesse longo percurso e jornada deste curso. Muitos dos que entraram comigo desistiram, outros trocaram de curso e eu permaneci, muitas memórias ficaram gravadas sejam boas ou ruins, de alguma forma serviu de incentivo para não desistir, fui guerreira e venci. De muitas amizades que fiz com algumas delas cheguei no fim dessa etapa.

2 CAPÍTULO TEÓRICO

Neste capítulo o objetivo é discutir sobre o conceito de Sequência Didática, a importância para formação do professor de Matemática e os conceitos matemáticos sobre circunferência trigonométrica principalmente seno e cosseno.

2.1 SEQUÊNCIA DIDÁTICA E FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Para desenvolvermos esta tomamos como referências teóricas Zabala (1998), e, Costa e Gonçalves (2016). Nesta seção apresentamos o conceito de Sequência Didática como sendo:

> "[...] um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que tem como princípio e um fim conhecidos tanto pelo professor como pelos seus alunos" (ZABALA,1998 apud COSTA, GONÇALVES, 2016, p.6).

Devemos pontuar diferença entre os conceitos de *atividade didática* e *sequência didática*, segundo os autores Costa e Gonçalves (2016), uma atividade não precisa ter sequência, diferentemente da sequência didática que se refere como um conjunto de atividades que se inter-relacionam entre si. Portanto nem toda atividade pode ter objetivos educacionais, mesmo que desenvolvido em sala de aula. Para Zabala (1998, p.53) a SD é um elemento diferenciador das atividades metodológicas ou forma de ensinar".

O autor considera que objetivo não consiste em avaliar determinados métodos, nem propor nenhum em conclusão, mas esclarecer sobre os instrumentos que permitem introduzir nas diferentes formas de intervenção aquelas atividades que possibilitem melhoras na atuação do professor em sala de aula:

> "[…] introduzir nas diferentes formas de intervenção aquelas atividades que possibilitem uma melhora de nossa atuação nas aulas, como resultado de um conhecimento mais profundo das variáveis que intervêm e do papel que cada uma delas tem no processo de ensino e aprendizagem" (ZABALA, 1998, p.54).

Nesta concepção, o planejamento de uma sequência didática envolve um conjunto de diferentes formas de intervenção no processo educativo, a importância da interatividade, a relação (diálogo) entre aluno/professor e aluno/aluno (convivência é fundamental) preliminar a aprendizagem, o conteúdo a ser desenvolvido, interações abordadas quanto ao conteúdo, observações no desenvolvimento e disposição de todos nas atividades, o tempo, espaço e recursos didáticos utilizados, avaliação, reflexão no planejamento da sequência didática para que a construção tenha fundamentação necessária para seu desenvolvimento e sua aplicação tenha êxito. Conforme o autor é preciso levar em conta a principal das intenções educacionais na definição dos conteúdos de aprendizagem e do papel das atividades que se propõem:

> "desta forma, haverá uma grande diferença entre um ensino que considere conteúdo de aprendizagem, por exemplo a observação dos fenômenos naturais, e o que situe num lugar de destaque as atitudes ou determinadas habilidades sociais, o que determinará um tipo de conteúdo, algumas atividades e, sobretudo, um tipo de sequência" (ZABALA, 1998, p.54).

Zabala (1998), explana, ainda, a importância da identificação das fases de uma sequência didática, as atividades que a correspondem e as relações que se estabelecem para compreensão do valor educacional e, verifica possíveis modificações a serem introduzidas, com objetivo de melhorar a aprendizagens dos conteúdos.

> "portanto, a identificação das fases de uma sequência didática, as atividades que a conformam e as relações que se estabelecem devem nos servir para compreender o valor educacional que tem, as razões que as justificam e a necessidade de introduzir mudanças ou atividades novas que a melhorem" (ZABALA,1998, p.54).

Conforme autor é preciso fazer uma análise as referências (sequências ou unidades didáticas) relacionadas a forma de ensinar, os resultados positivos encontrados com finalidades no processo de aprendizagem, o conhecimento dos processos subjacente à aprendizagem e o contexto educativo em que se realizam, de certa forma, se estão incompletas e precisam de mudanças, adaptações a serem realizadas para suprir as necessidades educacionais dos alunos:

> "o que nos interessa desta análise é reconhecer as possibilidades e as carências de cada unidade, com o fim de que nos permita compreender outras propostas e reconhecer, em cada momento, aquelas sequências que se adaptam mais às necessidades educacionais de nossos alunos" (ZABALA,1998, p.59)

A partir disto, ampliando a unidade de análise através da construção e implementação de novas práticas:

> "afirma que quando colocamos essas atividades numa série ou sequência significativa, ampliando a unidade de análise elementar (atividades e tarefas) para uma nova unidade, identificaremos as sequências de atividades ou sequências didáticas como unidade preferencial para uma análise prática (implementação de novas práticas), permitindo estudar e avaliar sob uma perspectiva processual, incluindo as fases de planejamento, aplicação e avaliação" (ZABALA,1998 *apud* COSTA, GONÇALVES 2016).

Costa e Gonçalves (2016) inferem que o processo de construção de sequência didática como (pro)motor da Educação Matemática na formação de professores, pode ser compreendida como uma metodologia de formação de professores, pois é através do processo de construção de Sequência Didática que o futuro professor vivenciará na prática as contribuições que podem ser relacionadas no processo de ensino e aprendizagem, corroborando com a conceituação de Zabala (1998).

As possibilidades de articular diferentes conteúdos, ampliar e refletir sobre o conhecimento didático, os tipos de atividades a serem desenvolvidas e a maneira como serão desenvolvidas é importante no processo reflexivo do professor pois, o mesmo poderá refletir se a SD é adequada para ensinar, e as metodologias escolhidas são suficientes.

Zabala (1998) diz que os tipos de atividades e a maneira de articulá-las, são um dos traços diferenciáveis que determinam a especificidade de muitas propostas didáticas, desde a escolha do tema, observação, avaliação, exercícios, aplicações. Isso nos mostra a importância de uma SD para a formação do professor, pois se um professor sabe elaborar uma SD, que favoreça a aprendizagem dos alunos com foco nos objetivos já estipulados em seu planejamento, então isso significa que ele está preparado tanto na parte conceitual quanto na metodologia.

Assim podemos entender que a SD pode ser utilizada para elaborar série de atividades de uma determinada habilidade definindo o tipo de conteúdo e o tipo de sequência, nos permitindo introduzir diferentes maneiras de aplicar um determinado conteúdo, e através dos resultados alcançados refletir em que podemos melhorar e analisar a necessidade de introduzir mudanças, ou seja, incluir atividades novas que contribuam na aprendizagem ou eliminá-las , o que levará o professor a pensar, planejar, criar mecanismos que promovam articulações no ensino entre a parte teórica e a prática, construindo suas próprias interpretações e concepções relacionado ao ensino e aprendizagem.

Os autores sugerem que para o fortalecimento da Educação Matemática (EM) é preciso que:

> “se criem mecanismos que permitem ser pensados, planejados e desenvolvidos em sala de aula, promovendo uma articulação entre as concepções e abordagem teóricas da EM com um momento prático vivenciado pelo professor ou educador matemático, para que este possa construir suas próprias interpretações, concepções sobre o processo de ensino e aprendizagem da Matemática” (COSTA, GONÇALVES, 2016, p.3).

Durante a formação do professor podemos vivenciar experiências que nos aproximam da prática de ensino, mas o educador está apto e capaz de transmitir seus conhecimentos adquirido ao percurso de sua formação? E o professor-formador mostrou caminhos para que se desenvolvam práticas que possibilitem a pensar, planejar estratégias de ensino?

Diante do que estudamos podemos dizer que Sequência Didática é uma sequência de atividades desenvolvida na elaboração de atividades de um determinado conteúdo formulado de diferentes possibilidades de ensino e aprendizagem, possibilitando a construção do conhecimento e reflexão do fazer pedagógico contribuindo na formação do professor.

Na próxima seção vamos nos dedicar a apresentar conteúdos matemáticos dentro da temática deste trabalho, a Circunferência trigonométrica.

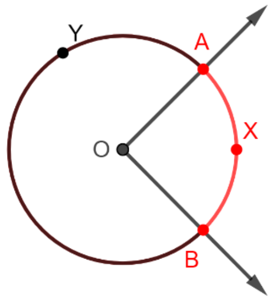
2.2 CIRCUNFERÊNCIA TRIGONOMÉTRICA: SENO E COSSENO

Esta seção é fundamentando em Iezzi (2013), abordaremos os conceitos de circunferência trigonométrica: seno e cosseno. Nesta seção também assumiremos já conhecer os conceito de ponto, reta, distância entre pontos, semirretas, ângulo de reta, e sistema cartesiano ortogonal. Conheceremos elementos fundamentais para aprofundarmos o conceito de circunferência trigonométrica como arcos de circunferência, medidas de arcos e ângulos.

Arcos de circunferências

Definição 2.1: Consideremos uma circunferência de centro O e um ângulo central AÔB, sendo A e B pontos que pertencem aos lados do ângulo e à circunferência. Dividindo a circunferência em duas partes, onde cada uma é um **arco de circunferência:**

Figura 1 - Arco de Circunferência



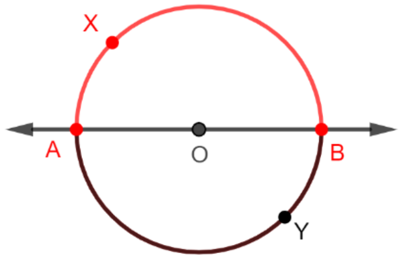
Fonte: Elaborado pela autora

Obtemos:

- Arco de circunferência $\widehat{AXB}$.
- Arco de circunferência $\widehat{AYB}$.

Note que os pontos A e B são extremidades dos arcos. Se os pontos A e B são extremidades de um diâmetro, temos dois arcos, cada um é chamado de **semicircunferência,** ou seja, $\widehat{AXB}$ e $\widehat{AYB}$ são **semicircunferências.**

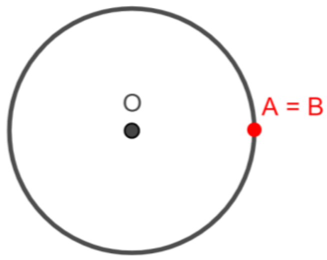
Figura 2 - Semicircunferência



Fonte: Elaborado pela autora

Se os pontos A e B coincidem, eles determinam dois arcos: um deles é um ponto (denominado **arco nulo**) e o outro é a circunferência (denominado **arco de uma volta**).

Figura 3 - Arco de uma volta

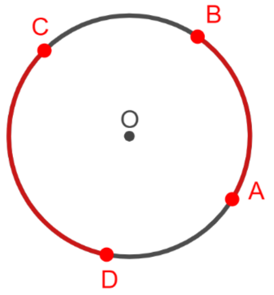


Fonte: Elaborado pela autora

Medida de arcos

Nesta subseção objetivamos comparar os comprimentos de dois arcos $\widehat{AB}$ e $\widehat{CD}$, para estabelecer um método que permita mensurá-los.

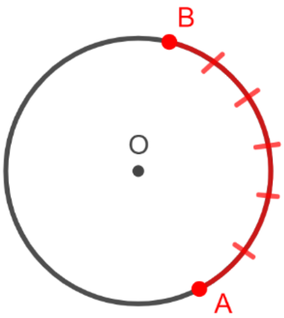
Figura 4 - Comprimento de dois arcos



Fonte: Elaborado pela autora

A medida de um arco $\widehat{AB}$, em relação a um arco unitário *u* (*u* não nulo e de mesmo raio que $\widehat{AB}$) é o número real que exprime quantas vezes o arco *u* "cabe" no arco $\widehat{AB}$. Conforme a figura 5, o arco *u* cabe 6 vezes no arco $\widehat{AB}$, então a medida do arco $\widehat{AB}$ é 6, isto é, arco $\widehat{AB}$= 6.arco *u*.

Figura 5 - Medida de Arco unitário

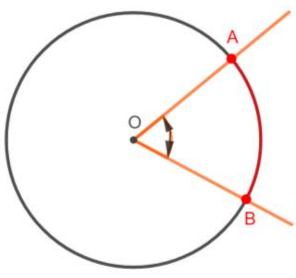


Fonte: Elaborado pela autora

Definição 2.2: O **Grau** é um arco unitário igual a $\frac{1}{360}$ da circunferência que contém o arco a ser medido. Denotamos pelo símbolo º.

Observa-se na figura 6 que: o ângulo central é o ângulo AÔB, pois tem o vértice O no centro da circunferência, e o arco $\widehat{AB}$ está em correspondência com ângulo central AÔB.

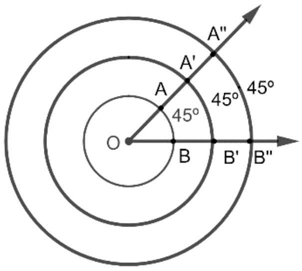
Figura 6 - Ângulo central AÔB



Fonte: Elaborado pela autora

Tomando-se a unidade de arco (arco unitário) o arco definido por um ângulo central unitário (unidade de ângulo) temos consequentemente que a medida de um arco de circunferência é igual à medida do ângulo central correspondente. Denotaremos por *m* a aplicação que calcula essa medida.

Figura 7 - Ângulo central correspondente



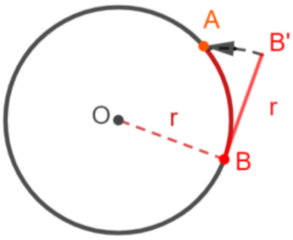
Fonte: Elaborado pela autora

$$m(\widehat{AB}) = m\left(\widehat{A'B'}\right) = m\left(\widehat{A''B''}\right) = 45°$$

Definição 2.3: O **Radianos** é um arco unitário cujo comprimento é igual ao raio r da circunferência que contém o arco a ser medido. Denotaremos pelo símbolo rad. A figura 8 ilustra um arco unitário em radianos, isto é:

$$\mathrm{m}(\widehat{AB}) = \ 1 \text{ rad}$$

Figura 8 - Arco unitário



Fonte: Elaborado pela autora

Sabemos que uma circunferência mede 360º, para saber sua medida em radiano considere uma circunferência cujo raio tenha medida r. O comprimento da circunferência *é 2πr* e sua medida x pode ser obtida em radianos por meio da regra de três:

$$1 \; rad — r$$

$$x — 2\pi r$$

consequentemente: $x = \frac{2\pi r}{r} rad = 2\pi rad.$

Portanto, a medida da circunferência é $2\pi rad$ em radianos.

Agora, podemos estabelecer uma correspondência para conversão das unidades. Uma medida em radianos é equivalente a uma medida em graus se são medidas de um mesmo arco, então:

360º equivale $2\pi rad$

180º equivale πrad

Esta equivalência nos permite transformar unidades, ou seja, dada a medida de um arco em graus, podemos obter a medida deste arco em radianos e vice-versa, por meio da utilização da regra de três**.**

Exemplo1: Obtenha a medida em radianos, equivalente a 120º.

$$\pi rad — 180^{\circ}$$

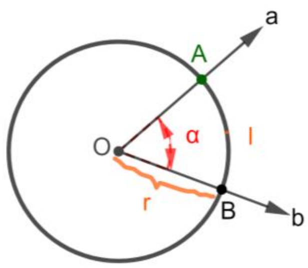
$$x — 120^{\circ}$$

Logo: $x = \frac{120\pi}{180} rad = \frac{2\pi}{3} rad.$

Medida de ângulos

Para medir em radianos um ângulo $a\hat{O}b$, devemos construir uma circunferência de centro O e raio r e verificar quantos radianos mede o arco $\widehat{AB}$, isto é, calcular o quociente entre o comprimento ℓ do arco $\widehat{AB}$, e o raio r da circunferência: $\alpha = \frac{\ell}{r}$(α em radianos).

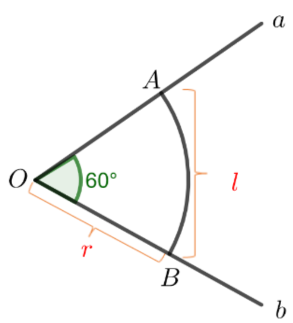
Figura 9 - Circunferência de centro O e raio



Fonte: Elaborado pela autora

Exemplo 2: Calcule o comprimento l do arco $\widehat{AB}$ definido numa circunferência de medida $r = 10\ cm$, por um ângulo central 60°, conforme ilustra Figura 10.

Figura 10 - ângulo $a\hat{O}b$



Fonte: Elaborado pela autora

Solução: convertido em radianos, o ângulo $a\hat{O}b$ tem medida igual a:

$$\alpha = \frac{\pi}{3}\ rad$$

então:

$$\alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow l = \alpha . r = \frac{\pi}{3} . 10$$

Portanto:

$$l = \frac{31{,}416}{3} = 10{,}472\ cm.$$

Recordando: um grau se divide em 60' (60 minutos) e um minuto se divide me 60" (60 segundos).

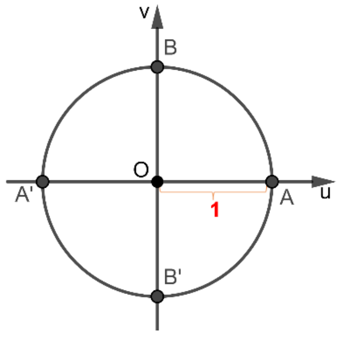
Exemplo 3: Seja o ângulo central $a\hat{O}b$ que determina uma circunferência de raio *r* = 5cm, um arco $\widehat{AB}$, de medida ℓ = 8 cm, determine a medida de $a\hat{O}b$.

$\alpha = \frac{\ell}{r} = \frac{8}{5} = 1{,}6\ rad$

Ciclo trigonométrico

Definição 2.4: Consideremos uma circunferência λ de centro *O* e raio unitário (r = 1), cujo centro coincida com a origem de um sistema cartesiano ortogonal uOv. O comprimento desta circunferência é 2π, pois *r* = 1.

Figura 11 - Circunferência λ

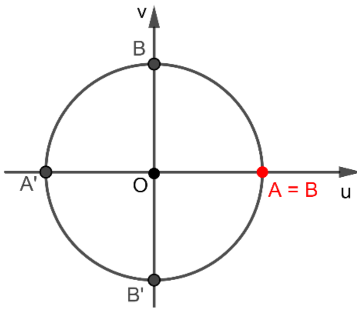


Fonte: Elaborado pela autora

Associando a cada número real x, com $0 \leq x < 2\pi$, um único ponto P da circunferência λ da seguinte forma, considere A com interseção do eixo das abcissas com a circunferência.

• Se $x = 0$ então P coincide com A.

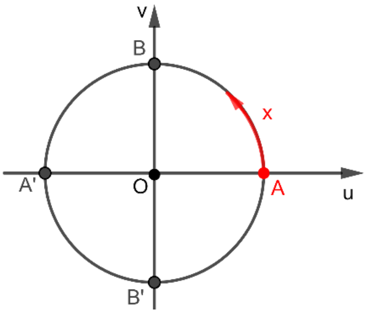
Figura 12 - P coincide com A



Fonte: Elaborado pela autora

• Se $x > 0$ então realizamos a partir de A um percurso de comprimento x, sentindo anti-horário, e marcamos P como ponto final do percurso.

Figura 13 - Comprimento do arco

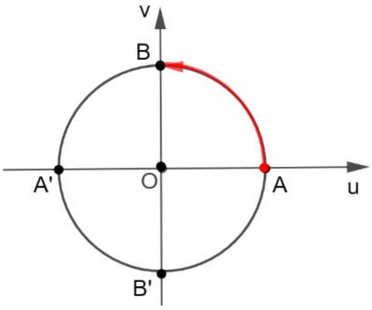


Fonte: Elaborado pela autora

• Se o ponto P está associado ao número x, dizemos que P é a imagem de x na circunferência.

Exemplo 4: Considere o arco $\widehat{AB}$ de medida $\frac{\pi}{2}$ rad.

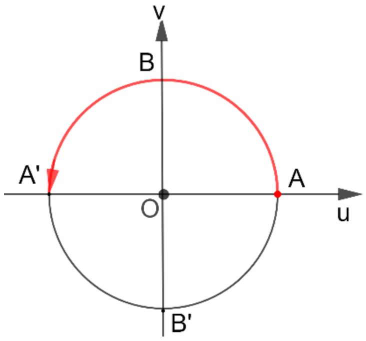
Figura 14 - Imagem de $\frac{\pi}{2}$ rad é B



Fonte: Elaborado pela autora

Exemplo 5: Considere o arco $\widehat{AA'}$ de medida $\pi\, rad$.

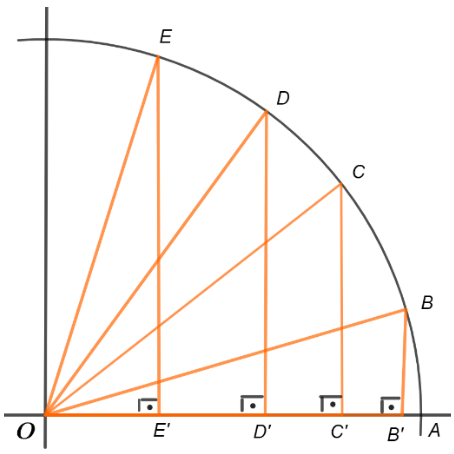
Figura 15 - A imagem de π é A'



Fonte: Elaborado pela autora

Segundo Paiva (2010), as razões trigonométricas seno, cosseno, tangente de um ângulo agudo retângulo, não depende do tamanho do triângulo, mas sim da medida do ângulo. Para construir uma tabela com essas razões, para vários ângulos, podem ser considerados triângulo retângulos que tenham hipotenusas de mesma medida e fazer variar a medida do ângulo agudo. Desta forma teremos quantos triângulos retângulos quisermos, observe a figura abaixo:

Figura 16 - Triângulos retângulos na circunferência



Fonte: Elaborado pela autora

- Os vértices *B*, *C*, *D* e *E* pertencem a mesma circunferência. As hipotenusas dos triângulos *BOB'*, *COC'*, *DOD'* e *EOE'* tem a mesma medida.
- Adotando a medida da hipotenusa como unidade (1), o seno e cosseno do ângulo agudo do vértice *O* de cada um destes triângulos serão, respectivamente a medida do cateto oposto e a medida do cateto adjacente a esse ângulo.

Exemplo: no triângulo retângulo BOB', com $m(B\hat{O}B') = \alpha$, podemos obter:

$$sen\ \alpha\ \frac{BB'}{OB} = \frac{BB'}{1} = BB'$$

$$cos\ \alpha\ \frac{OB'}{OB} = \frac{OB'}{1} = oB'$$

Logo, o seno e cosseno do ângulo de medida α são a medida do cateto oposto a $\alpha(BB')$ e a medida do cateto adjacente $\alpha(OB')$, respectivamente, quando a hipotenusa é adotada com unidade 1.

Essas ideias levaram os matemáticos a definir as razões trigonométricas em uma circunferência chamada de **circunferência trigonométrica,** na qual os conceitos de seno, cosseno e tangente são estendidos também para ângulos não agudos.

Construção da circunferência trigonométrica

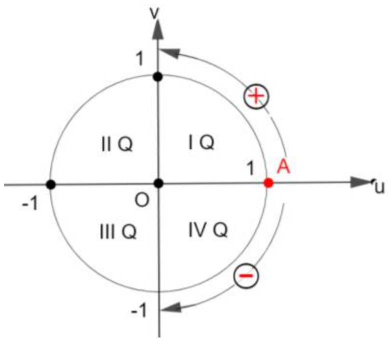
• O ponto $A(1{,}0)$ é a origem de todos os arcos a serem medidos na circunferência.

• Se um arco for medido no sentido **horário**, então será atribuído o sinal **negativo** (**–**) a essa medida.

• Se o arco for medido no sentido **anti-horário**, então será atribuído o sinal **positivo** (+) a essa medida.

• O eixo coordenado divide o plano cartesiano em quatro regiões denominadas quadrantes (Q), que a partir do ponto A são enumeradas no sentido anti-horário:

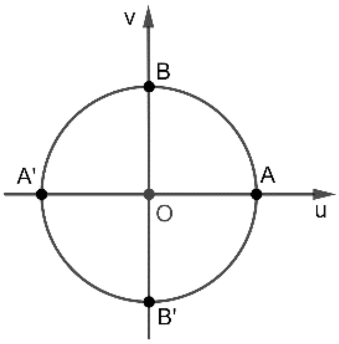
Figura 17 - Ciclo trigonométrico



Fonte: Elaborado pela autora

Para o estudo das razões trigonométricas na circunferência associaremos ao ciclo trigonométrico de origem A e raio $\overline{OA}$, em que OA é a medida do segmento igual a 1, e os quatro eixos u e v.

Figura 18 - Eixos seno e cosseno



Fonte: Elaborado pela autora

1º) eixo dos cossenos (u), direção $\overline{OA}$, sentido positivo $O \to A$

2º) eixo dos senos (v), direção perpendicular a u, passando por O sentido positivo $O \to B$, sendo B tal que $\widehat{AB} = \frac{\pi}{2}$.

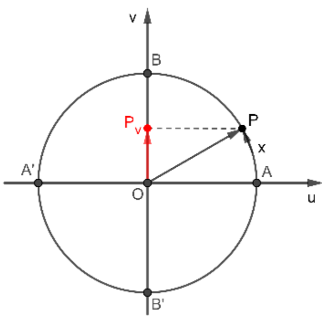
Como os eixos dividem a circunferência em quatro arcos: $\widehat{AB}, \widehat{BA'}, \widehat{A'B'}, e\ \widehat{B'A}$. Dado um número real x, usaremos a linguagem para localizar a imagem de P de x no ciclo.

- x está no 1º quadrante $\Leftrightarrow P \in \widehat{AB}$.
- x está no 2º quadrante$\Leftrightarrow P \in \widehat{BA'}$.
- x está no 3º quadrante$\Leftrightarrow P \in \widehat{A'B'}$.
- x está no 4º quadrante $\Leftrightarrow P \in \widehat{B'A}$.

Seno

Definição 2.5: Dado um número real $x \in [0, 2\pi]$, seja P sua imagem no ciclo trigonométrico. Denominamos *seno* de x a coordenada P_v do ponto P em relação ao sistema uOv. Ilustra-se $sen\ x$ na Figura 19.

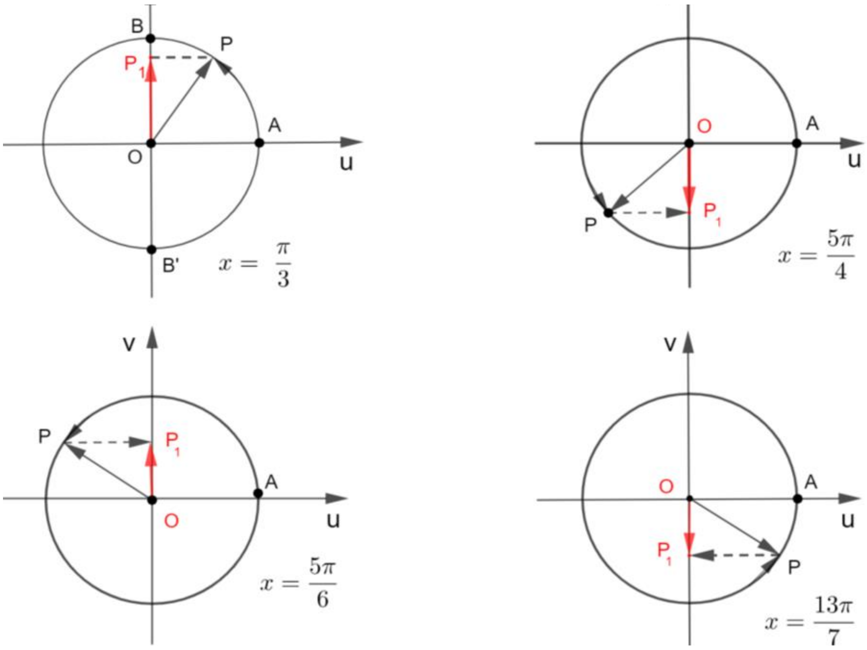
Figura 19 - Seno de x



Fonte: Elaborado pela autora

Para cada número real $x \in [0, 2\pi)$ existe uma única imagem dado pelo ponto P e para cada P existe tem um único valor para $m(\overline{OP_1})$.

Figura 20 - Imagem de P no eixo do seno

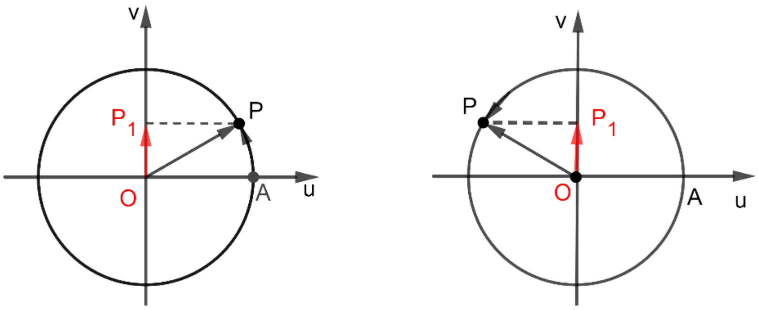


Fonte: Elaborado pela autora

Propriedades

1ª) Se x pertence ao primeiro ou ao segundo quadrante, então $sen\ x$ é positivo. O ponto P está acima do eixo u e sua ordenada é positiva.

Figura 21 - $sen\ x$ é positivo



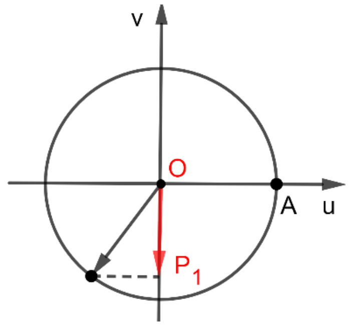
Fonte: Elaborado pela autora

$0 \leq OP_1 \leq 1$ $\qquad$ $0 \leq OP_1 \leq 1$

$0 \leq sen\ x \leq 1$ $\qquad$ $0 \leq sen\ x \leq 1$

2ª) Se x percorre ao terceiro quadrante ou ao quarto quadrante, então $sen\ x$ é negativo. O ponto O está abaixo do eixo u e sua ordenada é negativa.

Figura 22 - $sen\ x$ é negativo



Fonte: Elaborado pela autora

$$-1 \leq OP_1 \leq 0 \qquad -1 \leq OP_1 \leq 0$$

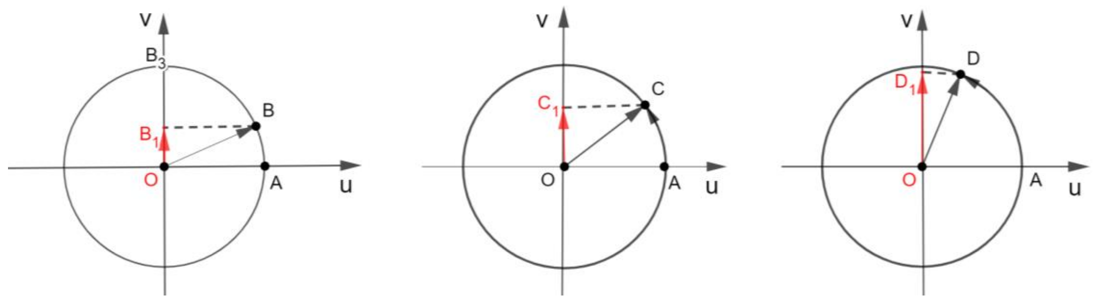
$$-1 \leq sen\, x \leq 0 \qquad -1 \leq sen\, x \leq 0$$

Portanto para todo $x \in [0, 2\pi)$, temos -1 $\leq sen\ x \leq$ 1, consequentemente -1 é o valor mínimo e 1 é o valor máximo de $sen\ x$.

3ª) Se x percorre ao primeiro ou quarto quadrante então $sen\ x$ é crescente:

- $sen\ x$ é crescente, pois x percorre ao 1° quadrante.

Figura 23 - $sen\ x$ é crescente no 1ºquadrante

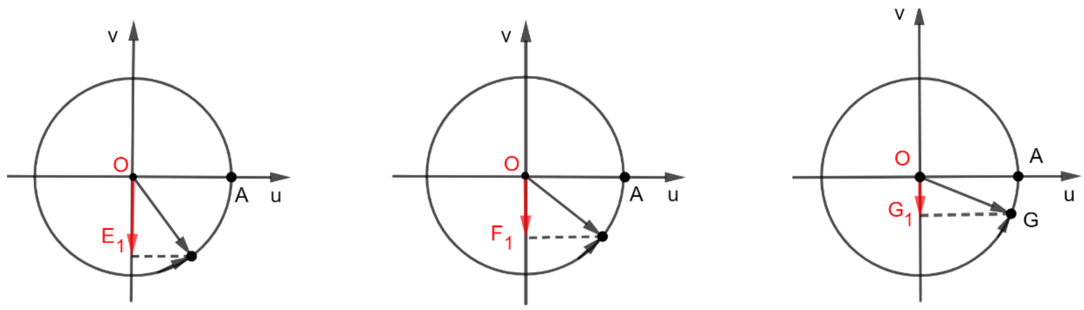


Fonte: Elaborado pela autora

Considere os arcos $\widehat{AB}, \widehat{AC}, e\ \widehat{AD}$ todos no 1º quadrante, tais que $m(\widehat{AB}) < m(\widehat{AC}) < m(\widehat{AD})$. Em correspondência $OB_1 < OC_1 < OD_1$, ou seja, $sen\, x$ cresce quando x percorre o 1º quadrante.

- $sen\ x$ é crescente, pois x percorre ao 4° quadrante.

Figura 24 - $sen\ x$ é crescente no 4º quadrante



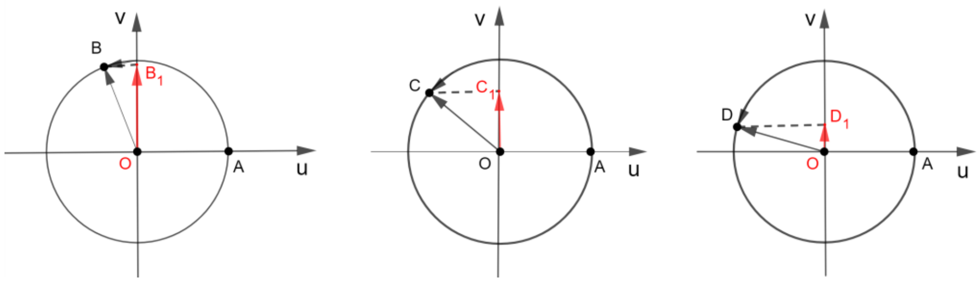
Fonte: Elaborado pela autora

Considere os arcos $\widehat{AE}, \widehat{AF}, e\ \widehat{AG}$ todos no 4º quadrante, tais que $m(\widehat{AE}) < m(\widehat{AF}) < m(\widehat{AG})$, em correspondência $OE_1 < OF_1 < OG_1$, ou seja, $sen\ x$ cresce quando x percorre o 4º quadrante.

4ª) Se x percorre ao segundo quadrante ou ao terceiro quadrante, então $sen\ x$ é decrescente.

- $sen\ x$ é decrescente pois percorre o 2° quadrante.

Figura 25 - $sen\ x$ é decrescente no 2° quadrante

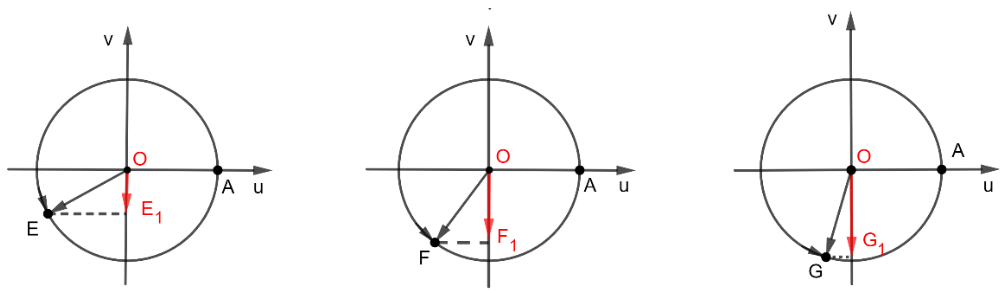


Fonte: Elaborado pela autora

Considere os arcos $\widehat{AB}, \widehat{AC} e\ \widehat{AD}$ todos no 2º quadrante, tais que $m(\widehat{AB}) < m(\widehat{AC}) < m(\widehat{AD})$, em correspondência $OB_1 > OC_1 > OD_1$,ou seja, $sen\ x$ decresce quando x percorre o 2º quadrante.

- $sen\ x$ é decrescente quando x percorre o 3° quadrante.

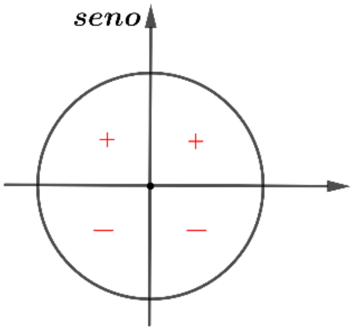
Figura 26 - $sen\ x$ é decrescente no 3° quadrante



Fonte: Elaborado pela autora

Considere os arcos $\widehat{AE}, \widehat{AF} e\ \widehat{AG}$ todos no 3º quadrante, tais que $m(\widehat{AE}) < m(\widehat{AF}) < m(\widehat{AG})$, e $OE_1 > OF_1 > OG_1$,ou seja, $sen\,x$ decresce quando x percorre o 3º quadrante. O Sinal de $sen\ x$ também pode ser sintetizado pela figura baixo:

Figura 27 - Variação de sinal do seno

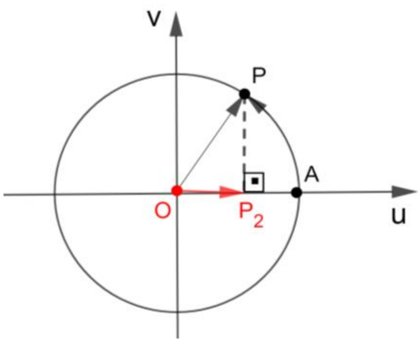


Fonte: Elaborado pela autora

Cosseno

Definição 2.6: Dado um número real $x\epsilon\ [0, 2\pi]$, seja P sua imagem no ciclo trigonométrico. Denominamos cosseno de x(indicamos $\cos x$) a abscissa OP_2 do ponto P em relação ao sistema uOv.

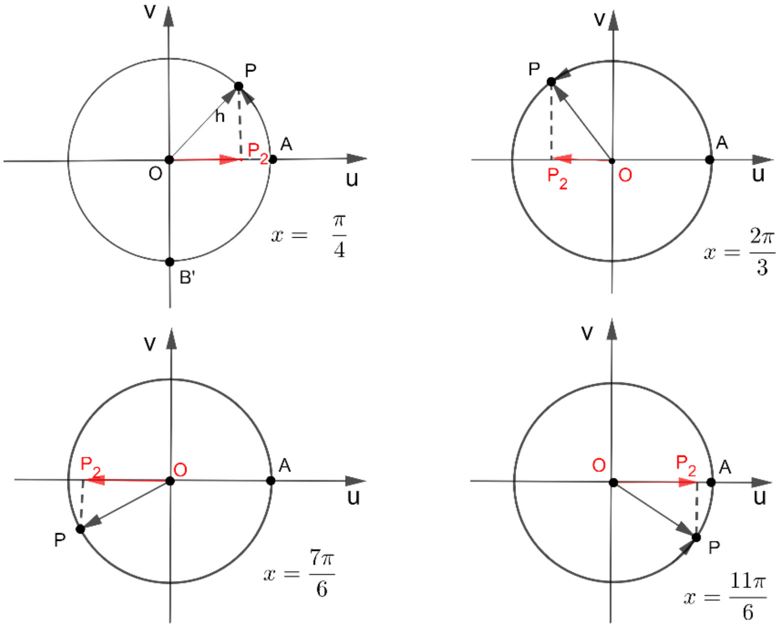
Figura 28 - Cosseno de x



Fonte: Elaborado pela autora

Para cada número real $x\epsilon$ [0,2π], existe uma única imagem dado pelo ponto P, e para cada ponto P existe um único valor para $cos\ x$ ($OP_2 = cos\ x$). Observe a ilustração na Figura 29.

Figura 29 - Imagem de *P* em relação a *x*

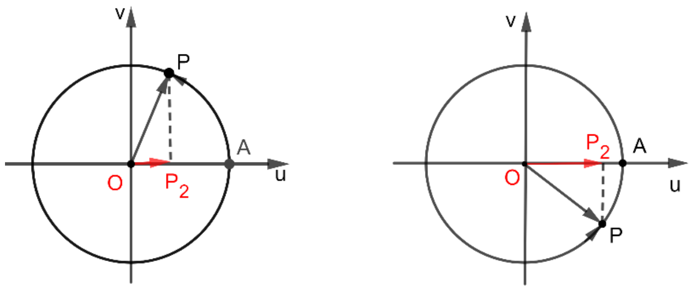


Fonte: Elaborado pela autora

Propriedades

1ª) Se x percorre ao primeiro ou ao quarto quadrante, então $cos\ x$ é positivo. O ponto P está à direita do eixo v e sua abscissa é positiva.

Figura 30 - Cosseno de *x* é positivo



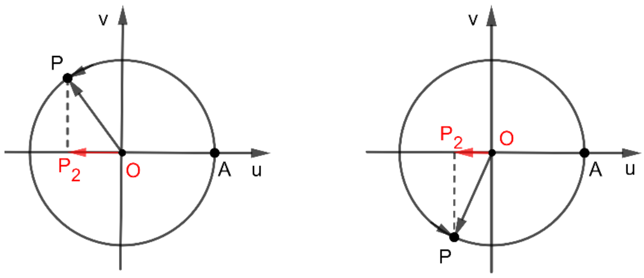
Fonte: Elaborado pela autora

$0 \leq OP_2 \leq 1$ $\qquad$ $0 \leq OP_2 \leq 1$

$0 \leq cos\ x \leq 1$ $\qquad$ $0 \leq cos\ x \leq 1$

2ª) Se x percorre ao segundo ou ao terceiro quadrante, então $cos\ x$ é negativo. O ponto P está à esquerda do eixo v e sua abscissa é sempre negativa, observe a Figura 31.

Figura 31 - Cosseno de *x* é negativo



Fonte: Elaborado pela autora

$-1 \leq \mathrm{OP}_2 \leq 0$ $\qquad$ $-1 \leq OP_2 \leq 0$

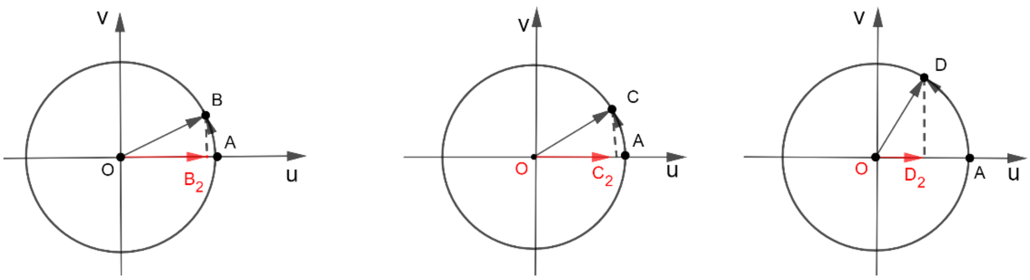
$-1 \leq \cos x \leq 0$ $\qquad$ $-1 \leq \cos x \leq 0$

Portanto, para todo $x \in [0,2\pi]$, temos -1≤ cos x ≤ 1, isto é, -1 e +1 são valores mínimo e máximo da abscissa OP_2, ou seja, do cosseno.

3ª) Se x percorre o primeiro ou o segundo quadrante, então cos x é decrescente.

- *cos x* é decrescente pois *x* percorre o 1° quadrante.

Figura 32 - *cos x* é decrescente

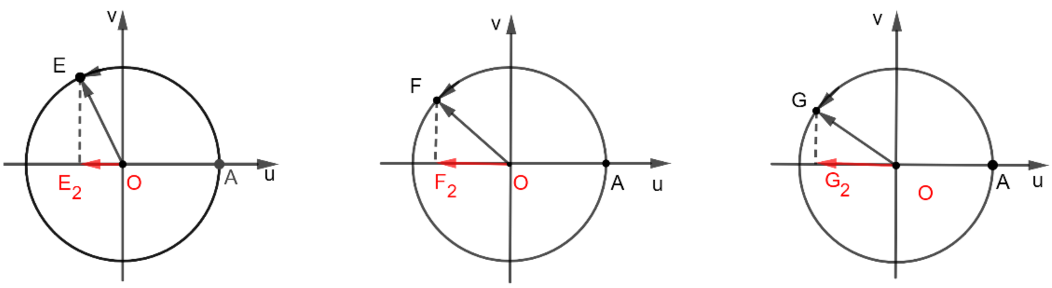


Fonte: Elaborado pela autora

Considere os arcos $\widehat{AB}, \widehat{AC}$ e $\widehat{AD}$ todos no 1º quadrante, tais que $m(\widehat{AB}) < m(\widehat{AC}) < m(\widehat{AD})$, em correspondência $OB_2 > OC_2 > OD_2$, ou seja, $\cos x$ decresce quando x percorre o 1º quadrante.

- cos x é decrescente pois *x* percorre no 2° quadrante.

Figura 33 - *cos x* é decrescente



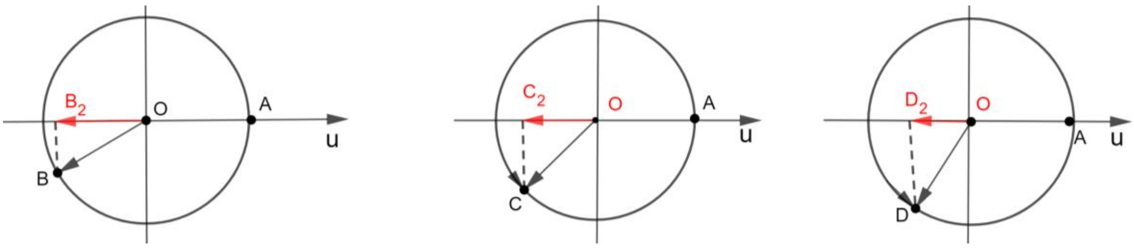
Fonte: Elaborado pela autora

Considere os arcos $\widehat{AE}, \widehat{AF}\, e\ \widehat{AG}$ todos no 2º quadrante, tais que $m(\widehat{AE}) < m(\widehat{AF}) < m(\widehat{AG})$, em correspondência $OE_2 > OF_2 > OG_2$, ou seja, $cos\ x$ decresce quando x percorre o 2º quadrante.

4ª) Se x percorre ao terceiro ou ao quadrante, então $cos\ x$ é crescente.

- cos x é crescente pois x percorre no 3° quadrante.

Figura 34 - Cosseno *x* é crescente

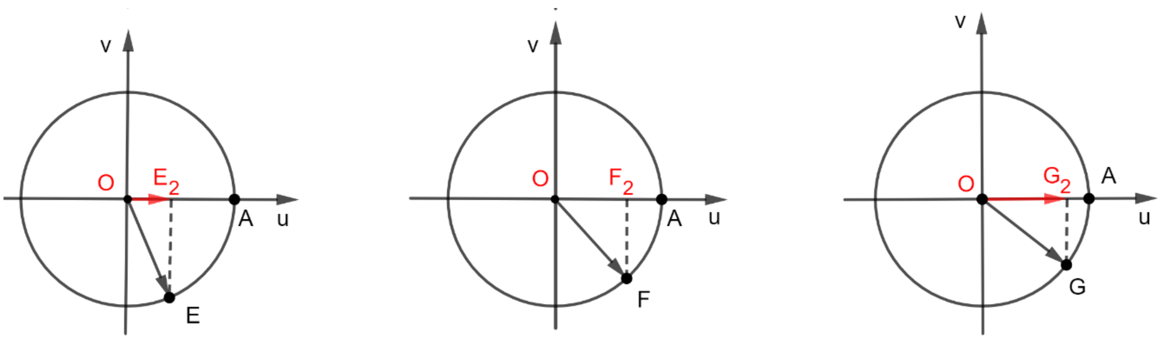


Fonte: Elaborado pela autora

Considere os arcos $\widehat{AB}, \widehat{AC}\ e\ \widehat{AD}$ todos no 3º quadrante, tais que $m(\widehat{AB}) < m(\widehat{AC}) < m(\widehat{AD})$, em correspondência $OB_2 < OC_2 < OD_2$, ou seja, $cos\ x$ cresce quando x percorre o 3º quadrante.

- cos x é crescente pois x percorre no 4° quadrante.

Figura 35 - Cosseno *x* é crescente

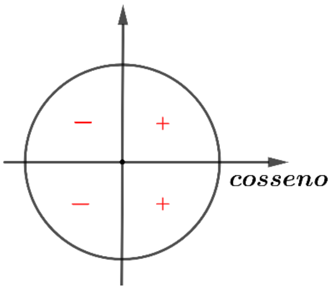


Fonte: Elaborado pela autora

Considere os arcos $\widehat{AE}, \widehat{AF}\, e\ \widehat{AG}$ todos no 4º quadrante, tais que $m(\widehat{AE}) < m(\widehat{AF}) < m(\widehat{AG})$, em correspondência $OE_2 < OF_2 < OG_2$, ou seja, $cos\ x$ cresce quando *x* percorre o 4º quadrante.

O sinal de $cos\ x$ também pode ser sintetizado assim:

Figura 36 - Variação de sinal do cosseno



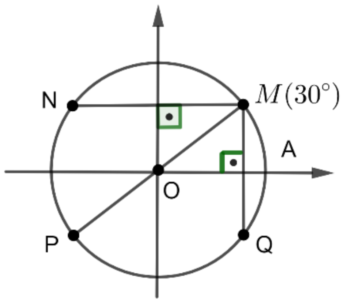
Fonte: Elaborado pela autora

Simetrias

Conforme Paiva (2010), é importante saber relacionar medidas de arcos trigonométricos com extremidades simétricas em relação a um dos eixos coordenados ou à origem do sistema cartesiano e calcular senos, cossenos, tangentes, etc, destes arcos.

Considere o ponto M da circunferência trigonométrica, associado à medida 30º, pelo o ponto M tracemos três retas: a perpendicular ao eixo das ordenadas, a que passa pela origem do sistema e a perpendicular ao eixo das abscissas, todas interceptando a circunferência nos pontos N, P e Q respectivamente.

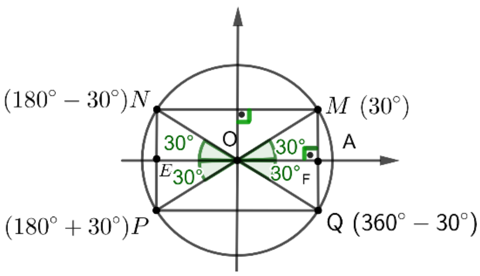
Figura 37 - N, P e Q pontos simétricos de M



Fonte: Elaborado pela autora

Os pontos N, P e Q são chamados de **simétricos** (ou correspondentes) do ponto M. Agora, determinemos as medidas x $(0° \leq x \leq 360°)$ associadas a esses pontos:

Figura 38 - medidas x(com 0º ≤ x ≤ 360º) associadas aos pontos



Fonte: Elaborado pela autora

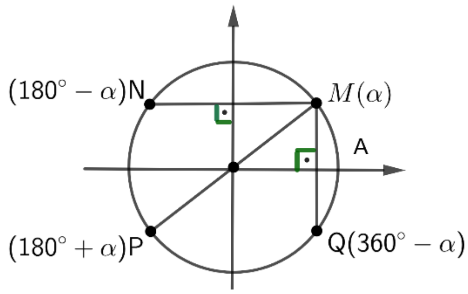
• Os ângulos $N\hat{O}E$ e $M\hat{O}F$ tem a mesma medida, pois os triângulos NOE e MOF são congruentes e o arco trigonométrico $\widehat{AN}$ mede 180º – 30º, ou seja 150º.

• Os ângulos $P\hat{O}E$ e $M\hat{O}F$ tem a mesma medida, pois são opostos pelo vértice e o arco trigonométrico $\widehat{AP}$ mede 180º + 30º, ou seja, 210º.

• Os ângulos $Q\hat{O}F$e $M\hat{O}F$ tem a mesma medida, pois os triângulos QOF e MOF são congruentes, e o arco trigonométrico $\widehat{AQ}$ mede 360º – 30º, ou seja, 330º.

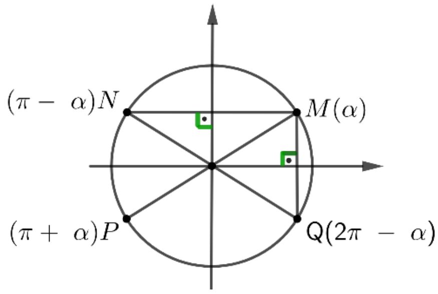
Generalizando os resultados temos:

Figura 39 - α uma medida em grau



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 40 - α uma medida em radiano



Fonte: Elaborado pela autora

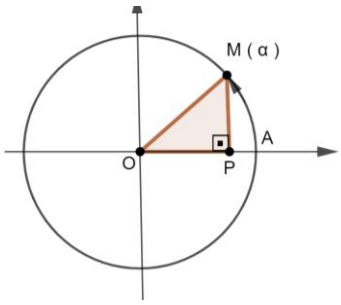
Relações fundamentais

Segundo Paiva (2010) dado um arco trigonométrico de medida α, vale a relação:

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

Vejamos, α é a medida de um arco com extremidade no 1º quadrante conforme Figura abaixo:

Figura 41 - Triângulo retângulo na circunferência



Fonte: Elaborado pela autora

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo OMP temos:

$$(PM)^2 + (OP)^2 = (OM)^2$$

sabemos que:

$$PM = sen\ \alpha,\ OP = \cos\alpha,\ \text{e}\ OM = 1$$

Substituindo nas fórmulas temos que:

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

Desta relação podemos obter ainda:

- $sen^2\alpha = 1 - cos^2\alpha$
- $cos^2\alpha = 1 - sen^2\alpha$

Arcos notáveis

Nesta subseção definiremos o conceito de polígono regular, conforme Osvaldo Dolce (2013), e estenderemos para Arcos notáveis.

Definição 2.7: Um polígono convexo é **regular**, se e somente se, tem todos os seus lados congruentes e todos os seus ângulos internos congruentes.

Resumidamente, os polígonos são chamados **regulares** quando são convexos, ou seja, possuem os lados com a mesma medida e todos os ângulos internos congruentes.

Conforme Iezzi (2013), as razões trigonométricas dos reais $x = \frac{\pi}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 3$, podem ser calculadas a partir de ℓ_n, que é o lado do polígono regular de n lados inscrito na circunferência.

Teorema: Para todo $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 3$, vale a relação:

$$sen\ \frac{\pi}{n} = \frac{\ell_n}{2}$$

Considere

$$A\hat{O}P = A\hat{O}P' = \frac{\pi}{n}$$

Como

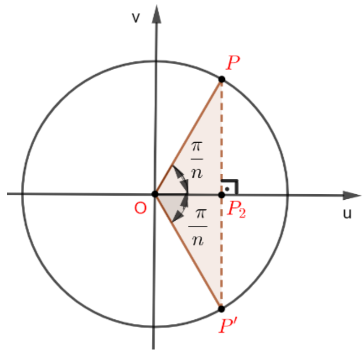
$$P'\hat{O}P = \frac{2\pi}{n};$$

Decorre,

$$P'P = \ell_{n}.$$

Observe que no triângulo isósceles $P'OP$ na Figura 42 :

Figura 42 - Triângulo isósceles P'OP



Fonte: Elaborado pela autora

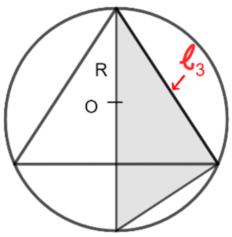
o segmento $\overline{DP_2}$, contido no eixo dos cossenos é **bissetriz** interna e também **altura** e **mediana**, isto é, $\overline{P'P} \perp u$ e P_2 é o ponto médio de $\overline{P'P}$. Então:

$$sen = \frac{\pi}{n} = P_2P = \frac{\ell_n}{2}$$

Aplicação 1: Valores das razões trigonométricas de $\frac{\pi}{3}$

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo destacado na Figura,

Figura 43 - Triângulo inscrito



Fonte: Elaborado pela autora

temos $\ell_3 = R\sqrt{3}$, onde o raio do ciclo é R = 1, temos:

$$sen\frac{\pi}{3} = \frac{\ell_3}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

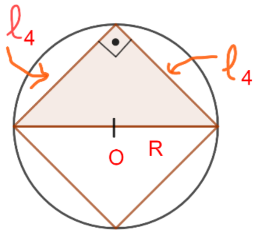
Consequentemente temos:

$$cos\frac{\pi}{3} = \sqrt{1 - sen^2\frac{\pi}{3}} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2};$$

Aplicação 2: Valores das razões trigonométricas de $\frac{\pi}{4}$

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo destacado na figura abaixo:

Figura 44 - Triângulo isósceles inscrito



Fonte: Elaborado pela autora

Temos:

$$\ell_4 = R\sqrt{2}$$

Então:

$$sen\frac{\pi}{4} = \frac{\ell_4}{2} = R\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

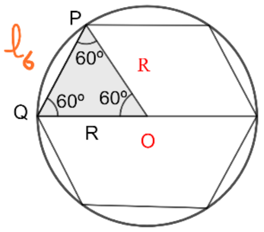
Consequentemente temos:

$$cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

Aplicação 3: Valores das razões trigonométricas de $\frac{\pi}{6}$

Sendo PQ = ℓ_6 o lado do hexágono regular inscrito, conforme figura abaixo:

Figura 45 - Hexágono regular inscrito



Fonte: Elaborado pela autora

o triângulo OPQ é equilátero, então:

$$\ell_6 = R$$

Consequentemente temos:

$$sen\frac{\pi}{6} = \frac{\ell_6}{2} = \frac{R}{2} = \frac{1}{2};$$

$$cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

Pelas aplicações acima podemos estabelecer a seguinte tabela:

Tabela 1- Valores

razão \ ângulo	30° ou $\frac{\pi}{6}$	45° ou $\frac{\pi}{4}$	60° ou $\frac{\pi}{3}$
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Fonte: Elaborado pela autora

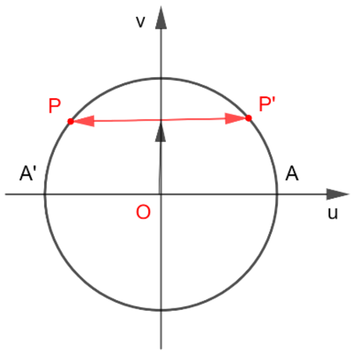
Redução ao 1º quadrante

Nesta subseção vamos deduzir fórmulas para calcular as razões trigonométricas de x. Conforme Iezzi (2013), considere x não pertencente ao 1º quadrante, relacionando x com algum elemento do 1º quadrante. Com objetivo de conhecer $sen\ x$ e cos x a partir de uma tabela que dê as razões circulares dos reais pertencentes a $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Redução do 2º ao 1º quadrante

Dado o número real x tal que $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$, seja P a imagem de x no ciclo. Seja P' o ponto do ciclo, simétrico de P em relação ao eixo dos senos. Conforme Figura 46:

Figura 46 - Simétrico de P em relação ao eixo dos senos



Fonte: Elaborado pela autora

Temos as seguintes relações:

$$\widehat{AP} + \widehat{PA'} = \pi \text{ (no sentido anti-horário)},$$

Como

$$\widehat{AP'} = \widehat{PA'}$$

Segue que:

$$\widehat{AP} + \widehat{AP'} = \pi,$$

Portanto

$$\widehat{AP'} = \pi - x.$$

Consequentemente temos:

$$sen\ x = sen(\pi - x)$$

$$cos\ x = -cos(\pi - x).$$

Exemplo 6: Calcularemos alguns exemplos utilizando as fórmulas acima.

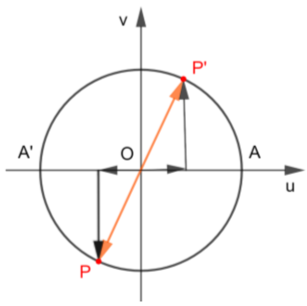
$$sen\ 115° = sen(180° - 115°) = sen\ 65°$$

$$cos\ 130° = -cos(180° - 130°) = -cos\ 50°$$

Redução do 3º ao 1º quadrante:

Dado um número real x tal que $\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$, seja o ponto P a imagem de x no ciclo e P' o ponto do ciclo, simétrico de P em relação ao centro. Conforme ilustra a Figura 47:

Figura 47 - Simétrico de P em relação ao centro



Fonte: Elaborado pela autora

Temos as seguintes relações:

$$\widehat{AP} - \widehat{Pa'} = \pi \text{(no sentido anti-horário)},$$

Logo,

$$\widehat{AP'} = (x - \pi)$$

Portanto,

$$sen\ x = -sen(x - \pi)$$

$$cos\ x = -cos(x - \pi).$$

Exemplo 7: Calcularemos alguns exemplos utilizando as fórmulas acima.

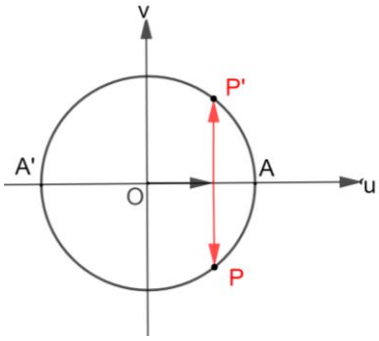
$$sen\ 210° = -sen(210° - 180°) = -sen\ 30°$$

$$cos\ 225° = -cos(225° - 180°) = -cos\ 45°$$

Redução do 4º ao 1º quadrante

Dado o número real x tal que $\frac{3\pi}{2} \leq x < 2\pi$, seja o ponto P a imagem de x no ciclo e P' o ponto do ciclo, simétrico de P em relação ao eixo dos cossenos, conforme imagem abaixo:

Figura 48 - Simétrico de P em relação ao eixo



Fonte: Elaborado pela autora

Temos as seguintes relações:

$$\widehat{AP} + \widehat{PA} = 2\pi \text{ (no sentido anti-horário) e,}$$

Como

$$\widehat{AP'} + \widehat{PA}$$

Segue que:

$$\widehat{AP} + \widehat{AP'} = 2\pi$$

ou seja,

$$\widehat{AP'} = 2\pi - x.$$

Logo,

$$sen\ x = -sen(2\pi - x)$$

$$cos\ x = cos(2\pi - x)$$

Exemplo 8: Calcularemos alguns exemplos utilizando as fórmulas acima.

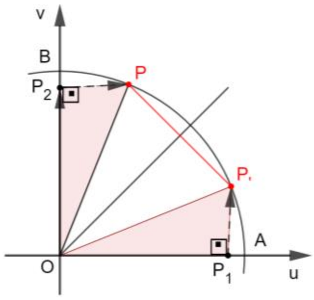
$$sen\ 280° = -sen(360° - 280°) = -sen\ 80°$$

$$cos\ 340° = cos(360° - 340°) = cos\ 20°$$

Redução de $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$a $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

Dado o número real x tal que $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, seja o ponto P a imagem de x no ciclo, P' o ponto do ciclo simétrico de P em relação à bissetriz do 1º quadrante, conforme imagem abaixo:

Figura 49 - Simétrico de P em relação à bissetriz



Fonte: Elaborado pela autora

Temos a seguintes relações:

$$\widehat{AP} + \widehat{PB} = \frac{\pi}{2} \text{ (no sentido anti-horário)}$$

como

$$\widehat{PB} = \widehat{AP'}$$

segue que:

$$\widehat{AP} + \widehat{AP'} = \frac{\pi}{2}$$

então

$$\widehat{AP'} = \frac{\pi}{2} - x.$$

Considerando a congruência dos triângulos OPP_2 e $OP'P'_1$, temos:

$$OP_2 = OP'_1 \Rightarrow sen\, x = cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$P_2P = P'_1P' \Rightarrow cos\, x = sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Exemplo 9: Calcularemos alguns exemplos utilizando as fórmulas acima

$$sen\, 71° = cos(90° - 71°) = cos\, 19°$$

$$cos\, 60° = sen(90° - 60°) = sen\, 30°$$

$$sen\frac{\pi}{3} = cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = cos\frac{\pi}{6}$$

$$cos\frac{5\pi}{12} = sen\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12}\right) = sen\frac{\pi}{12}$$

Finalizamos este capítulo, onde apresentamos os conceitos que serão utilizados na construção de SD, bem como os conceitos de SD e suas implicações para a formação docente e o ensino. De forma particular para o ensino de matemática. O próximo capítulo apresentará os aspectos metodológicos do estudo.

3. METODOLOGIA DE PESQUISA

Esse estudo se caracteriza por uma pesquisa qualitativa do tipo teórica, teórica no sentido de que realizamos um aprofundamento nos conteúdos de trigonometria na circunferência. Para Fiorentini e Lorenzato (2012) um estudo é teórico quando se reconstrói teorias, conceitos, com argumentos e coerência.

Utilizamos a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) do Ensino Médio no que concerne as competências e habilidades esperadas para o ensino e aprendizagem dos conteúdos que são o foco deste trabalho: as razões trigonométricas na circunferência para Seno e Cosseno.

Conforme a BNCC os estudantes devem consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração. A BNCC propõe a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental, na qual o foco é a construção de uma visão matemática aplicada a realidade em diferentes contextos, destacando-se a importância do recurso a tecnologias digitais e aplicativos tanto para investigação matemática como para dar continuidade ao desenvolvimento do pensamento computacional, pois novos conhecimentos específicos devem estimular processos mais elaborados de reflexão e abstração que deem sustentação a modos de pensar, permitindo a formulação e resolução de problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos.

Os estudantes devem desenvolver as habilidades relativas aos processos de investigação, construção de modelos e resolução de problemas, mobilizando seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações, procedimentos cada vez mais sofisticados. Após essa análise da BNCC e dos conteúdos integrada da matemática, delimitamos a construção de 5 SD, com os seguintes Objeto de conhecimento:

- 1ª SD O radiano, unidade de medida de arco e de ângulo;

- 2ª SD Arcos trigonométricos, arcos côngruos, associando números reais aos pontos da circunferência;

- 3ª SD Simetria;

- 4ª SD Seno e cosseno de um arco trigonométrico;

- 5ª SD Redução ao 1º quadrante e Relação fundamental da trigonometria;

Para esboçarmos as SD deste trabalho vamos utilizar uma estrutura modelo:

Quadro 1- Estrutura modelo de uma Sequência Didática

<table>
<tr><td colspan="4" align="center">SEQUÊNCIA DIDÁTICA
ENSINO MÉDIO</td></tr>
<tr><td>Profa. xxxxx</td><td colspan="2">Turma: xxxx</td><td>Data: xxxxx
Duração: x aulas</td></tr>
<tr><td colspan="2">Área do conhecimento: xxxxxxxxxx</td><td colspan="2">Componente Curricular: xxxxxx</td></tr>
<tr><td>Unidade Temática: xxxxxx</td><td colspan="3">Objeto de conhecimento: xxxxxxx</td></tr>
<tr><td colspan="4">Habilidade (Conforme BNCC): xxxxxxxx</td></tr>
<tr><td colspan="4">Desenvolvimento:

Aula 1 – Introdução e levantamento do conhecimento prévio

Elaborar quantas atividades forem necessárias, com foco em situações que podem ser exploradas para relacionar o conteúdo a ser ministrado com o cotidiano e os conteúdos já estudados pelos alunos.
Aula 2,3...n – Conteúdo a ser trabalhado

Elaborar quantas atividades forem necessárias.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Recursos: Mencionar os recursos a serem utilizados de acordo com cada atividade proposta.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Avaliação: Utilizar diversas possibilidades avaliativas por exemplo: Observação e registro das interações durante as aulas, produções individuais e em grupo, seminário e prova escrita.</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pela autora

No próximo capítulo vamos apresentar SD elaboradas por nós para o Ensino do das Razões trigonométricas na circunferência: Seno e Cosseno, com objetivo de contribuir para o ensino e aprendizagem voltada para a 2ª série do Ensino Médio.

4. AS SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS PARA ENSINO DE RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NA CIRCUNFERÊNCIA: SENO E COSSENO

O ensino de razões trigonométricas na circunferência: seno e cosseno desenvolvidos na 2ª série do Ensino Médio é uma transição do Ensino Fundamental na qual requer conhecimento básico de trigonometria no triângulo retângulo, para dar prosseguimento ao ensino de trigonometria na circunferência.

Quanto as dificuldades de aprendizagem dos alunos em trigonometria no Ensino Médio, Nascimento (2013, p. 4) considera que:

> As maiores dificuldades apresentadas pelos alunos dá-se no estudo analítico da trigonometria, e uma delas é a não diferenciação que antes, no triângulo retângulo tinha um significado e agora apresenta outro foco. Evidencia-se exercícios mecânicos nas resoluções de equações e inequações com nenhuma contextualização, não familiarização com as fórmulas, dificuldade na interpretação de situações problemas, como também ênfase em atividades relacionadas a identidades trigonométricas.

Iniciaremos a construção das sequências didáticas da circunferência trigonométrica a partir da SD na qual aborda o conceito de radiano e transformações de medidas quanto ao comprimento de um arco de grau para radiano e vice-versa. Em seguida apresentaremos a construção da SD sobre circunferência trigonométrica e a estrutura que a contém, conceito de arcos trigonométricos e arcos côngruos, e associar os números reais aos pontos da circunferência. Em sequência, a SD sobre o estudo de simetria ou pontos correspondentes, em seguida a SD que trata sobre o seno e cosseno de um arco trigonométrico, variação de sinal seno e cosseno e a tabela trigonométrica de arcos notáveis, finalizamos com a SD na qual desenvolvemos a redução ao 1º quadrante e relação fundamental da trigonometria.

Assim vamos apresentar a 1ª SD que tratará sobre o radiano, a medida da circunferência em radiano e transformações de medidas. Este conteúdo se apresenta em Paiva (2010), logo após o capítulo 2 na qual se referente a trigonometria no triângulo retângulo. E depois daremos continuidade a construção das SD conforme objeto de conhecimento abordado.

As habilidades desenvolvidas na SD são identificadas por um código alfanumérico, por exemplo (**EM13MAT20)**, o primeiro par de letras (EM) indica a etapa do Ensino Médio, o primeiro par de números (13) indica que as habilidades descritas podem ser desenvolvidas em qualquer série do Ensino Médio, conforme definição dos currículos, a segunda sequência de letras indica a área ou componente curricular (MAT), neste caso Matemática e suas tecnologias e os números finais indicam a competência específica à qual se relaciona a habilidade (1° número) e sua numeração no conjunto de habilidades relativas a cada competência, neste caso os dois últimos números (201). Conforme a BNCC do Ensino Médio destaca-se que o uso de numeração sequencial para identificar as habilidades não representa uma ordem ou hierarquia esperada das aprendizagens. Cabe aos sistemas e escolas definir a progressão das aprendizagens, em função de seus contextos locais.

Quadro 2 - SD Medida da circunferência em radiano e transformações de unidades

<table>
<tr><td colspan="4" align="center">SEQUÊNCIA DIDÁTICA
ENSINO MÉDIO</td></tr>
<tr><td>Profª. Claudenice</td><td colspan="2">Turma: 2ª Série</td><td>Data: xxxxx
Duração: 2 aulas</td></tr>
<tr><td colspan="2">Área do conhecimento: Área da Matemática</td><td colspan="2">Componente Curricular: Matemática</td></tr>
<tr><td>Unidade Temática: Geometria e medidas</td><td colspan="3">Objeto de conhecimento: Radiano, Medida da circunferência em radiano e transformações de unidades</td></tr>
<tr><td colspan="4">Habilidade:
(EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.
(EM13MAT103) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Desenvolvimento:

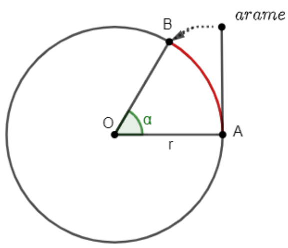
Aula 1 – Introdução e levantamento do conhecimento prévio

Atividade 1 – Apresentar o objetivo da aula, despertando a curiosidade sobre o tema.

Definir o conceito de radiano e calcular a medida de um arco em radianos, apresentaremos o radiano como outra unidade de medida para calcular o arco e ângulo na circunferência.

• Radiano

Propor a construção de uma circunferência de centro O, cujo tamanho do raio é r, com um arame de mesma medida do raio, curve o arame em forma de um arco e meça na circunferência marcando seus pontos.

Figura 50 - Circunferência de raio r


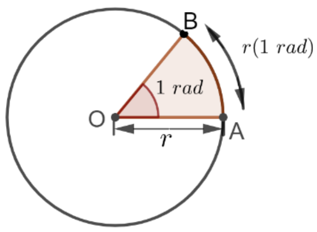
Fonte: Elaborado pela autora

A medida do arco formada pelo arame tem o mesmo comprimento do raio, a essa medida damos o nome de radiano ($\boldsymbol{1rad}$), do centro da circunferência até o arco temos dois lados formando um ângulo que terá a mesma medida do arco igual a 1 rad.
A partir disto definamos:</td></tr>
</table>

Seja $\widehat{AB}$ um arco contido em uma circunferência de raio *r* e centro *O* tal que o comprimento do arco $\widehat{AB}$ seja igual a *r*. Conforme Figura 51, podemos definir:

- A medida do arco $\widehat{AB}$ como um radiano ($1\,rad$).
- A medida do ângulo $A\hat{O}B$ como $1\,rad$. HHHJB

Figura 51 - Medida do arco e do ângulo



Fonte: PAIVA (2010, p. 76)

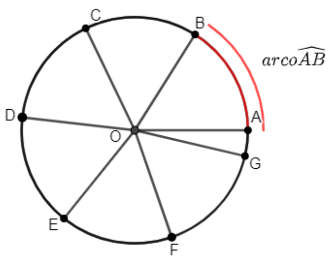
Logo,

$$m(\widehat{AB}) = m(A\hat{O}B) = 1\,rad.$$

Medida da circunferência em radiano

Agora observe a circunferência de centro O e raio r, temos 6 arcos de mesma medida e um arco $\widehat{GA}$ de medida menor, ou seja, $6\,rad + \widehat{GA}\,rad$, já sabemos que uma circunferência em mede 360 ° e seu comprimento é de $2\pi r$, como $\pi \approx 3,14$ e o raio mede $1rad$, logo $2 \times 3,14 \times 1\,rad = 6,28\,rad, logo\ \widehat{GA} = 0,28\,rad$. Portanto a circunferência terá $6\,rad + \widehat{GA}rad = 2\pi rad$.

Figura 52 - Unidade de arcos na circunferência



Fonte: Elaborado pela autora

Consideremos uma circunferência, cujo raio tenha medida r. Como o comprimento dessa circunferência é $2\pi r$. Podemos obter sua medida x em radiano, por meio da regra de três:

medida do arco		comprimento do arco
$1\,rad$	———	r
x	———	$2\pi r$

Logo,

$$x = \frac{2\pi r}{r}\ rad$$

Consequentemente,

$$x = 2\pi\ rad$$

Portanto, o comprimento da circunferência, cuja a medida *x* em radiano é igual à $2\pi\ rad$.

Assim, podemos concluir que a medida da circunferência é $2\pi rad$. Como $\pi \approx 3{,}14$, então o raio da circunferência cabe aproximadamente, 6,28 vezes no comprimento da circunferência.

Atividade 2 – O objetivo de transformar a medida de grau para radiano e vice-versa. Mostraremos equivalência de uma medida de mesmo arco.

- **Transformação de unidades**

Dizemos que uma medida em radiano é equivalente a uma medida em graus se ambas forem medidas de um mesmo arco, por exemplo, $2\pi\ rad$ é equivalente a 360° pois ambas são medição de um arco de uma volta completa, consequentemente $\pi\ rad$ é equivalente a 180°. Essa equivalência nos permite transformar unidades, ou seja, transformar medida de um arco em graus para radiano e vice-versa. Exemplos:

Determine em radiano, equivalente a 120°

radiano grau

$$\pi\ -\ 180°$$
$$x\ -\ 120$$

$$x = \frac{120\pi}{180} rad$$

$$x = \frac{2\pi}{3} rad$$

Logo *x* é igual a $\frac{2\pi}{3} rad$.

Determine em radiano, equivalente a $\frac{\pi}{6}\ rad$

radiano grau

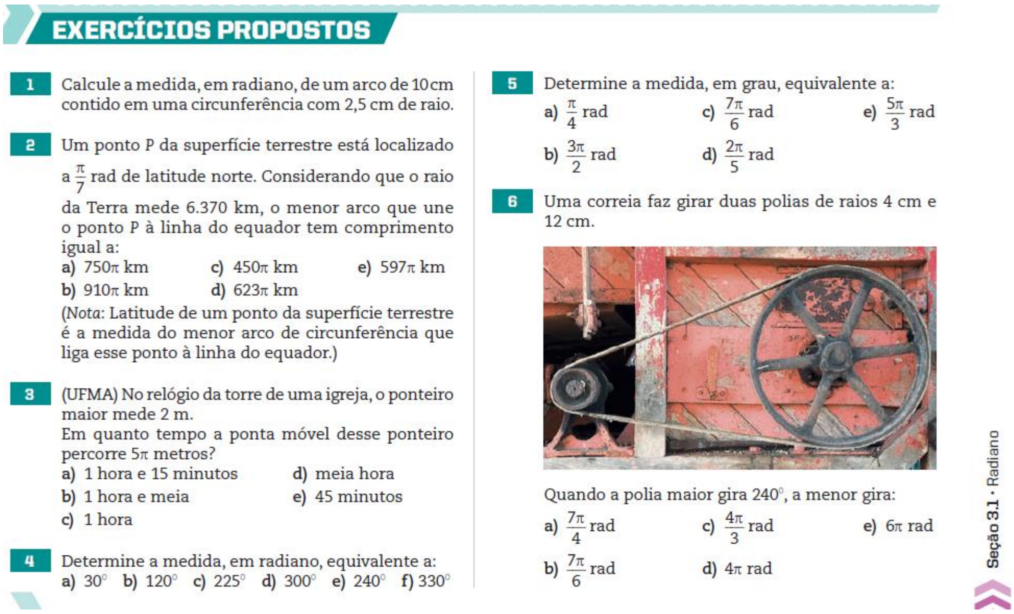
$$\pi\ -\ 180°$$
$$\frac{\pi}{6}\ rad -\ x$$

$$x = \frac{180 \cdot \frac{\pi}{6}}{\pi} \text{graus} \Rightarrow x = 30°$$

Logo x é igual a 30°.

Atividade 3 – Com objetivo de explanar o aprendizado do aluno, apresentaremos a proposta da resolução dos exercícios proposto no livro pg.77 (PAIVA, Manuel Rodrigues. Matemática: Paiva, 2 Edição. São Paulo: Moderna, 2010.p.77-914.).

Figura 53 - Exercícios



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 Calcule a medida, em radiano, de um arco de 10 cm contido em uma circunferência com 2,5 cm de raio.

2 Um ponto P da superfície terrestre está localizado a $\frac{\pi}{7}$ rad de latitude norte. Considerando que o raio da Terra mede 6.370 km, o menor arco que une o ponto P à linha do equador tem comprimento igual a:
a) 750π km b) 910π km c) 450π km d) 623π km e) 597π km
(*Nota*: Latitude de um ponto da superfície terrestre é a medida do menor arco de circunferência que liga esse ponto à linha do equador.)

3 (UFMA) No relógio da torre de uma igreja, o ponteiro maior mede 2 m.
Em quanto tempo a ponta móvel desse ponteiro percorre 5π metros?
a) 1 hora e 15 minutos b) 1 hora e meia c) 1 hora d) meia hora e) 45 minutos

4 Determine a medida, em radiano, equivalente a:
a) 30° b) 120° c) 225° d) 300° e) 240° f) 330°

5 Determine a medida, em grau, equivalente a:
a) $\frac{\pi}{4}$ rad b) $\frac{3\pi}{2}$ rad c) $\frac{7\pi}{6}$ rad d) $\frac{2\pi}{5}$ rad e) $\frac{5\pi}{3}$ rad

6 Uma correia faz girar duas polias de raios 4 cm e 12 cm.

Quando a polia maior gira 240°, a menor gira:
a) $\frac{7\pi}{4}$ rad b) $\frac{7\pi}{6}$ rad c) $\frac{4\pi}{3}$ rad d) 4π rad e) 6π rad

Seção 3.1 • Radiano

Fonte: PAIVA (2010, p. 77)

Aula 2 – Faremos a correção dos exercícios, observando o desenvolvimento do aluno quanto ao conceito estudado, seus aprendizados e suas dificuldades.

Recursos: papel, caneta e livro, régua, arame maleável, tesoura sem ponta, compasso (pode substituir por uma tampa para desenhar uma circunferência).

Avaliação: Observação e registro das interações durante as aulas, produções individuais e em grupo caso necessário.

Referências:
PAIVA, Manuel Rodrigues. Matemática: Paiva, 2 Edição. São Paulo: Moderna, 2010.p.76-914.
O que é radiano - https://www.youtube.com/watch?v=kTMsXJUqzZo.

Fonte: Elaborado pela autora

A SD referente a 2ª série do Ensino Médio, com unidade temática em geometria e medidas, cujo objeto de conhecimento é radiano: unidade de medida de arco e ângulo, foram desenvolvidas as habilidade conforme a BNCC, a SD tem duração de 2 aulas, na aula 1 apresentamos o objetivo da aula e desenvolvemos 3 atividades, na atividade 1 definimos radiano e a medida da circunferência, na atividade2 transformação de unidades, ou seja, transformação de medidas de grau para radiano e vice-versa, na atividade 3 concluímos com exercícios proposto no livro didático, com objetivo de explanar o aprendizado do aluno, na aula 2 desenvolvemos a correção dos exercícios proposto, observando o desenvolvimento do aluno quanto ao conceito estudado, seus aprendizados e suas dificuldades.

Esta sequência fora desenvolvida em três partes: a primeira parte temos a introdução do conteúdo e levantamento do conhecimento prévio na qual desenvolvemos o conceito de radiano, através de uma atividade experimental, concluindo com sua definição de radiano, como pré-requisito para dar continuidade ao assunto subsequente à medida de arco e transformação de unidades. Na segunda parte, damos continuidade ao assunto, exemplificando o conteúdo já explanado anteriormente aplicando exercícios propostos, na terceira parte fazemos um diagnóstico do avanço do aluno no conteúdo matemático. Fazemos uso de vídeo aula explicando o sobre o assunto para que o aluno tenha a possibilidade de rever a explicação quantas vezes achar necessário.

Quadro 3- SD Circunferência Trigonométrica e Arcos trigonométricos

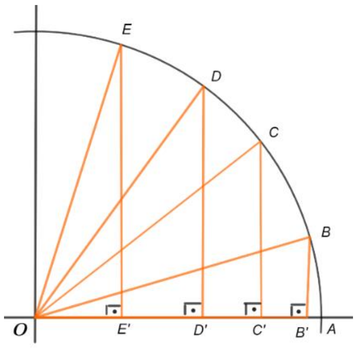
<table>
<tr><td colspan="3" align="center">SEQUÊNCIA DIDÁTICA
ENSINO MÉDIO</td></tr>
<tr><td>Profª. Claudenice</td><td>Turma: 2ª Série</td><td>Data: xxxxx
Duração: 4 aulas</td></tr>
<tr><td colspan="2">Área do conhecimento: Área da Matemática</td><td>Componente Curricular: Matemática</td></tr>
<tr><td>Unidade Temática: Geometria e Medidas</td><td colspan="2">Objeto de conhecimento: Circunferência Trigonométrica, Arcos trigonométricos, arcos côngruos, associando números reais aos pontos da circunferência.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Habilidade: (EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Desenvolvimento:

Aula 1 – Introdução e levantamento do conhecimento prévio

Atividade 1 – Apresentar o objetivo da aula, despertando a curiosidade sobre o tema.

O objetivo é de associar os pontos da circunferência trigonométrica a medida dos arcos e determinar as medidas dos arcos côngruos a outro arco.
Circunferência trigonométrica
Recordando que as razões trigonométricas, seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo em um triângulo retângulo, não dependem do tamanho do triângulo, mas sim da medida do ângulo. Desse modo, para construir uma tabela com essas razões, para vários ângulos, podemos considerar triângulos retângulos que tenham hipotenusa de mesma medida e fazer variar a medida do ângulo agudo, assim teremos tantos triângulos retângulos quantos quisermos. Observe a figura 54 abaixo onde representaremos alguns desses triângulos:</td></tr>
</table>

Figura 54 - Triângulo retângulo na circunferência



Fonte: Elaborado pela autora

Os vértices B, C, D e E pertencem a mesma circunferência, cujo raio é a medida da hipotenusa dos triângulos. Adotando a medida da hipotenusa como unidade (1), o seno e cosseno de um ângulo agudo de vértice O em cada um dos triângulos serão, respectivamente a medida do cateto oposto e a medida do cateto adjacente a esse ângulo.

Exemplificando: No triângulo retângulo $\boldsymbol{BOB'}$ com $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{B}\hat{O}\boldsymbol{B'}) = \boldsymbol{\alpha}$, temos:

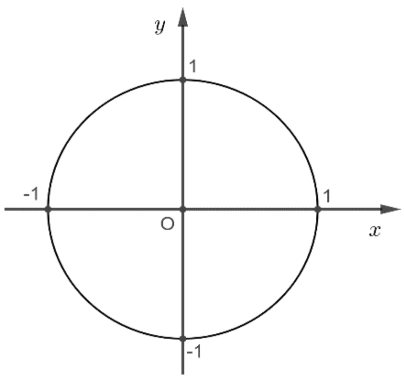
$\boldsymbol{sen\ \alpha} = \frac{\boldsymbol{BB'}}{\boldsymbol{OB}} = \frac{\boldsymbol{BB'}}{\boldsymbol{1}} = \boldsymbol{BB'}$ $\cos \boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{OB'}}{\boldsymbol{OB}} = \frac{\boldsymbol{OB'}}{\boldsymbol{1}} = \boldsymbol{OB'}$

Logo o seno e cosseno do ângulo de medida $\propto$ são o cateto oposto a $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{BB'})$ e o cateto adjacente a $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{OB'})$, respectivamente, quando a hipotenusa é adotada como unidade (1).
Segundo Paiva (2010), essas ideias levaram os matemáticos a definir as razões trigonométricas em uma circunferência, chamada de **circunferência trigonométrica,** onde os conceitos de seno, cosseno e tangente são estendidos para ângulos não agudos.

Construção da circunferência trigonométrica

Atividade 2 – Utilizaremos o software GeoGebra para construção da circunferência trigonométrica.
Considerando uma circunferência de raio r unitário (r = 1), cujo centro O coincide com a origem de um sistema cartesiano ortogonal.

Figura 55 - Circunferência trigonométrica

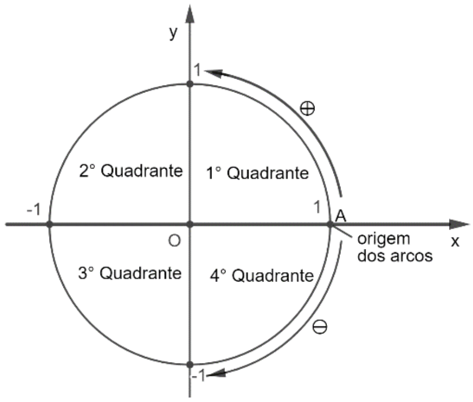


Fonte: Elaborado pela autora

Sendo que essa estrutura com as conversões seguintes, constitui a **circunferência trigonométrica:**

Sendo A (1,0) o ponto de origem dos arcos a serem medidos na circunferência, no qual será atribuído valor positivo se o arco for medido em sentido anti-horário, e negativo se o arco for medido no sentido horário, onde os eixos coordenados dividem a circunferência em quatro quadrantes enumeradas em sentido anti-horário a partir do ponto A. Sendo que os pontos dos eixos coordenados não pertencem a nenhum quadrante.

Figura 56 - Circunferência dividida em 4 quadrantes



Fonte: Elaborado pela autora

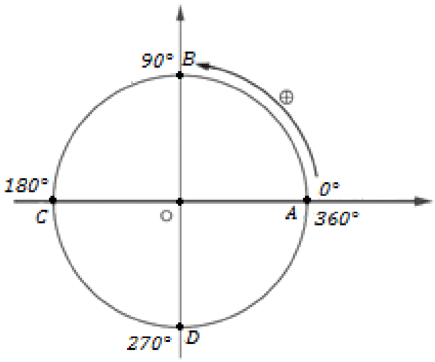
Atividade 3 – Agora vamos associar os pontos da circunferência trigonométrica a medida dos arcos e calcular a os arcos côngruos.

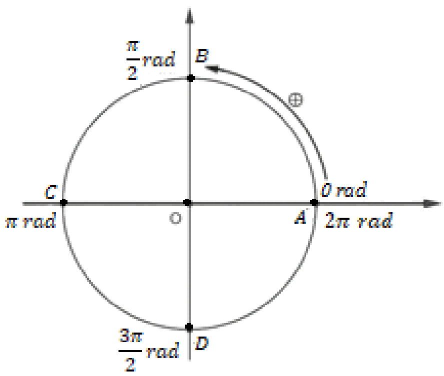
Arcos trigonométricos

Aos pontos da circunferência trigonométrica associamos medidas em grau ou em radiano. Cada medida associada a um ponto *M* indica o tamanho do arco $\widehat{AM}$.

Exemplo 1: Partindo do ponto A e girando uma volta completa no sentido anti-horário, associamos medidas em grau e em radiano aos pontos A, B, C, e D conforme Figura baixo:

Figura 57 - Medidas associada aos pontos sentido anti-horário

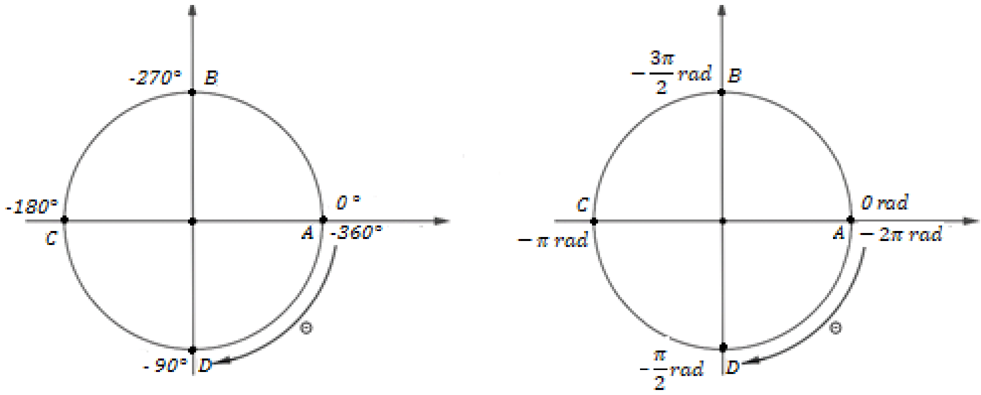




Fonte: Elaborado pela autora

Exemplo 2: Partindo do ponto A e girando uma volta completa no sentido horário, associamos as seguintes medidas aos pontos A, B, C e D.

Figura 58 - Medidas associada aos pontos sentido horário



Fonte: Elaborado pela autora

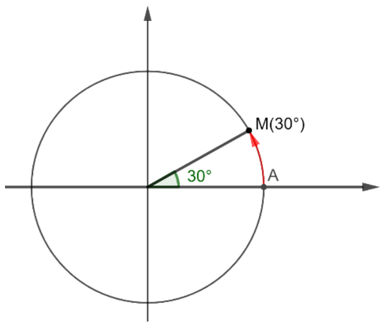
Atividade 4: Nessa atividade passaremos um vídeo para que o aluno construir o ciclo trigonométrico no GeoGebra, conforme orientações no vídeo https://www.youtube.com/watch?v=QMyyhdnF4xQ, com intuito de associar as medidas em radiano no ponto dado na circunferência trigonométrica.

Aula 2: **Arcos Côngruos**

Atividade 1: Determinando as medidas dos arcos côngruos:

Girando 30°, no sentido anti-horário, a partir do ponto A da circunferência trigonométrica abaixo, paramos no ponto *M*. Logo, 30° é a medida associada ao ponto *M*.

Figura 59 - Medida associada ao ponto M

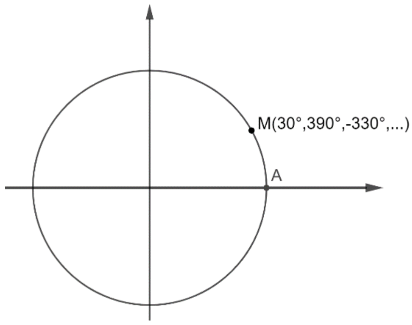


Fonte: Elaborado pela autora

• Girando uma volta completa mais 30°, no sentido anti-horário, a partir do ponto *A*, parando no ponto *M*, temos 360° + 30°, isto é, 390° que também é uma medida associada ao ponto *M*.

• Girando 330°, no sentido horário, a partir do ponto A, parando no ponto *M*, temos -330° que também é uma medida associada ao ponto *M*.

Figura 60 - Arco trigonométrico com extremidades iguais



Fonte: Elaborado pela autora

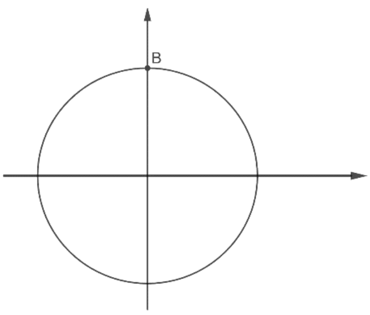
Logo, existem infinitas outras medidas que podem ser associadas ao ponto M. Portanto podemos concluir que Arcos trigonométricos que têm a mesma extremidade são chamada de **arcos côngruos**.

Se $\boldsymbol{\alpha}$ ***e*** $\boldsymbol{\beta}$ são medidas de arcos côngruos, indicamos: $\boldsymbol{\alpha} \equiv \boldsymbol{\beta}$ (lemos: "$\boldsymbol{\alpha}$ é côngruo a $\boldsymbol{\beta}$). Do exemplo anterior podemos concluir que: $\mathbf{30}° \equiv \mathbf{390}° \equiv \mathbf{-330}°$.

Atividade 2: Resolveremos alguns exercícios com objetivo de calcular a medida de *x*, em grau e em radiano, associando ao ponto da circunferência trigonométrica:

1º) Calcularemos as medidas de *x*, em grau, associadas ao ponto *B* da circunferência trigonométrica abaixo, nas quatros primeiras voltas positivas ($\mathbf{0}° \leq \ \boldsymbol{x} < \mathbf{1.440}°$).

Figura 61 - Medida x associado ao ponto B



Fonte: Elaborado pela autora

Resolução:

A medida em grau associada ao ponto *B*

• na 1ª volta positiva é de 90°

• na 2ª volta positiva:

$90° + 360° = 450°$

• na 3ª volta positiva:

$90° + 2 \cdot 360° = 810°$

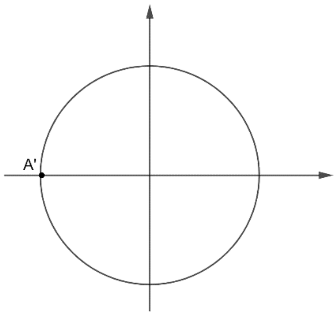
• na 4ª volta positiva:

$90° + 3 \cdot 360° = 1.170°$

Logo, as medidas dos arcos côngruos associada ao ponto B são: 90°, 450°, 810°, 1170°.

2º) Determinaremos a medida de x, em radiano, associando ao ponto A' da circunferência trigonométrica abaixo, nas quatros primeiras voltas positivas ($0 \leq x < 8\pi$).

Figura 62 - Medida x associado ao ponto A'



Fonte: Elaborado pela autora

Resolução:

A medida em radiano associada ao ponto A'

• na 1ª volta positiva é π

• na 2ª volta positiva:

$\pi + 2\pi = 3\pi$

• na 3ª volta positiva:

$\pi + 2 \cdot 2\pi = 5\pi$

• na 4ª volta positiva:

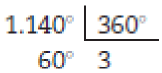
$\pi + 3 \cdot 2\pi = 7\pi$

Logo, as medidas dos arcos côngruos associado ao ponto A' são: $\boldsymbol{\pi, 3\pi, 5\pi\ e\ 7\pi}$.

3º) Calcularemos a medida de x do arco da 1ª volta positiva ($\mathbf{0}° \leq \boldsymbol{x} < \mathbf{360}°$) que possui a mesma extremidade do arco de 1.140°.

Resolução: Basta desconsiderar do arco 1.140° todas as voltas completas. Para isso dividiremos 1.140 por 360°

Figura 63 - Cálculo da medida x



Fonte: Elaborado pela autora

Assim, $\mathbf{1.140}° = \mathbf{3} \cdot \mathbf{360}° + \mathbf{60}°$, ou seja, o arco 1.140° têm três voltas completas e mais 60°, desconsiderando as voltas completas, obtemos a medida de x do arco côngruo ao arco de 1.140° na 1ª volta positiva: *x* = 60°.

4º) Determinaremos a medida de x do arco da 1ª volta positiva ($\mathbf{0} \leq \boldsymbol{x} < \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}$) que possui a mesma extremidade dos arcos abaixo:

$\boldsymbol{a}$) $\frac{\mathbf{17}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{rad}$

$\boldsymbol{b}$) $\frac{\mathbf{19}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{rad}$

Resolução: desconsiderando todas as voltas completas de cada arco, transformaremos a medida de cada arco em uma soma de duas parcelas tal que uma delas represente o total de voltas completas contidas no arco.

$$\boldsymbol{a})\ \frac{\mathbf{17}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{16}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}} + \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}} = \underbrace{\mathbf{8}\boldsymbol{\pi}}_{\textit{quatro voltas completas}} + \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}$$

Desconsiderando as voltas completas pois, $\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}\,\boldsymbol{rad} = \boldsymbol{\pi}\,\boldsymbol{rad} = \mathbf{0}\,\boldsymbol{rad}$, concluímos que $\frac{\mathbf{17}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\ \boldsymbol{rad} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\ \boldsymbol{rad}$

Logo a medida de $\boldsymbol{x}$ é igual $\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\ \boldsymbol{rad}$.

$$\boldsymbol{b})\ \frac{\mathbf{19}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{18}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}} + \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}} = \underbrace{\mathbf{6}\boldsymbol{\pi}}_{\textit{três voltas completas}} + \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}$$

Desconsiderando as voltas completas, concluímos que $\frac{\mathbf{19}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}\ \boldsymbol{rad} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{rad}$

Logo, a medida de $\boldsymbol{x}$ é igual $\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}\ \boldsymbol{rad}$.

Aula 3 – Propor a Resolução e apresentação de exercícios do livro didático desenvolvidas em grupo.

Atividade 1: Após abordagem do conteúdo onde devem associar os pontos da circunferência trigonométrica a medida dos arcos e determinar as medidas dos arcos côngruos a outro arco. Será proposto a resolução do exercício (6 questões) proposto no livro da pg.80. (PAIVA, Manuel Rodrigues. Matemática: Paiva, 2 Edição. São Paulo: Moderna, 2010.p.80-914), as resoluções devem ser desenvolvidas em grupo (quantidade de pessoas por grupo a definir) e entregue posteriormente.

Atividade 2: Será sorteado uma questão referente aos exercícios resolvidos, para cada grupo e um dos membros de cada grupo, ficará responsável pela resolução e explicação da questão sorteada.

Aula 4 – O objetivo é associar os números reais aos pontos da circunferência trigonométrica.

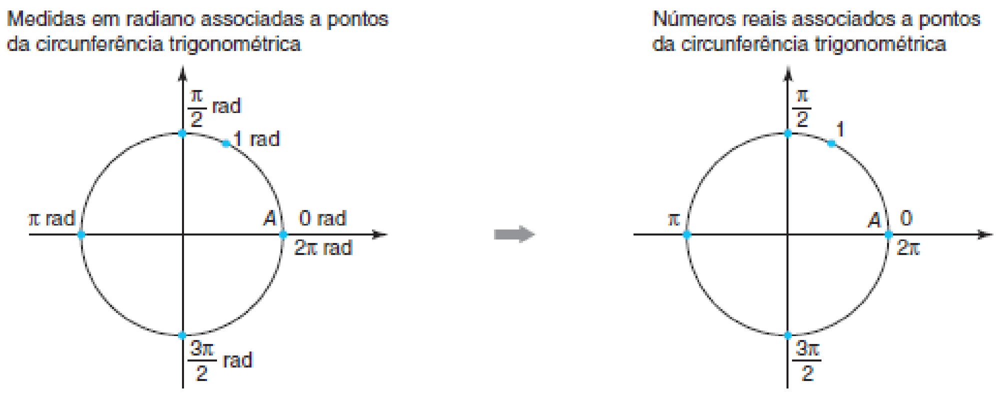
Atividade 1: Vamos considerar a correspondência que associa em radiano ao número real que a representa:

Por exemplo, associamos:

- à medida 0 rad o número real 0;
- à medida 1 rad o número real 1;
- à medida $\frac{\pi}{2}$ rad o número real $\frac{\pi}{2}$;
- à medida π rad o número real π;
- à medida x rad o número real x.

Assim, associamos a cada número real um ponto da circunferência trigonométrica conforme Figura 63.

Figura 64 - Associação de números reais a um ponto da circunferência



Fonte: PAIVA (2010, p. 81)

Podemos notar que a cada ponto da circunferência trigonométrica estão associados infinitos número reais, considerando infinitas voltas que podem girar no sentido horário e anti-horário, o ponto A da circunferência trigonométrica anterior é extremidade dos arcos de medidas:

$$\ldots -\mathbf{4\pi\ rad}, -\mathbf{2\pi\ rad}, \mathbf{0\ rad}, \mathbf{2\pi\ rad}, \mathbf{4\pi\ rad}, \mathbf{6\pi\ rad}, \mathbf{8\pi\ rad}, \ldots$$

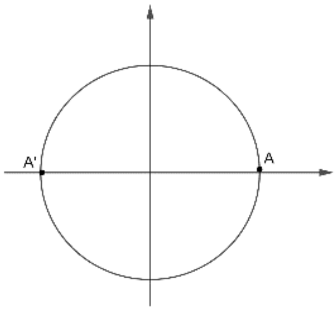
Logo, ao ponto A estão associados os infinitos números reais:

$$\ldots -\mathbf{4\pi}, -\mathbf{2\pi}, \mathbf{0}, \mathbf{2\pi}, \mathbf{4\pi}, \mathbf{6\pi}, \mathbf{8\pi}, \ldots$$

Observando a diferença entre os dois termos consecutivos quaisquer dessa sequência é $\mathbf{2\pi}$, podemos representar todos esses números reais por:

$$\boldsymbol{x = 0 + k \cdot 2\pi}, \text{ com } \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}, \text{ ou } \boldsymbol{x = k \cdot 2\pi}, \text{ com } \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}.$$

Ressaltando que existem infinitas expressões diferentes que podem representar os números reais associados ao ponto A. Basta associar a qualquer termo da sequência $\ldots -\mathbf{4\pi}, -\mathbf{2\pi}, \mathbf{0}, \mathbf{2\pi}, \mathbf{4\pi}, \mathbf{6\pi}, \mathbf{8\pi}, \ldots$ um múltiplo de $\mathbf{2\pi}$, por exemplo: $\boldsymbol{x = 6\pi + k \cdot 2\pi, com\ k} \in \mathbb{Z}$.

Desafio**:** Obtenha uma expressão que represente todos os números reais associados aos pontos A ou A' da circunferência trigonométrica abaixo: Figura 65 - Representação dos números reais associados aos pontos  Fonte: Elaborado pela autora ***Atividade 2***– Aplicaremos um vídeo explanando o conteúdo já estudado: https://www.youtube.com/watch?v=wFbs14AQeCs.
Recursos: papel, caneta e livro, computador ou celular ou tablete.
Avaliação: Observação e registro das interações durante as aulas, produções individuais e em grupo.
Referências: **Matemática:** PAIVA, Manuel Rodrigues. Matemática: Paiva, 2 Edição. São Paulo: Moderna, 2010.p.914. https://www.youtube.com/watch?v=QMyyhdnF4xQ. https://www.youtube.com/watch?v=wFbs14AQeCs.

Fonte: Elaborado pela autora

Na SD referente a 2ª série do Ensino Médio, com unidade temática em geometria e objeto de conhecimento em circunferência trigonométrica são; arcos trigonométricos, arcos côngruos e associando números reais aos pontos da circunferência trigonométrica, com duração de 4 aulas aproximadamente. Na aula 1 apresentamos o objetivo da aula, com a composição de 4 atividades, onde na atividade 1 recordando sobre as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo em um triângulo retângulo, com intuito de definir as razões trigonométricas na circunferência, onde os conceitos são de seno, cosseno e tangente são estendidos para ângulos não agudos. Na atividade 2, utilizamos o software para a construção da circunferência. Na atividade 3, associamos pontos da circunferência a medida dos arcos côngruos. Na atividade 4, aplicamos um vídeo explicativo com intuito de associar as medidas em radianos no ponto da circunferência.

Na aula 2, composta por duas atividades, onde na atividade 1 determinamos as medidas dos arcos côngruos e sua definição. Na atividade 2 realizamos cálculo da medida de x em grau e em radiano. Na aula 3, desenvolvemos duas atividades, onde na atividade 1, temos aplicação de exercícios avaliativo em grupo. Na atividade 2, apresentação das resoluções dos grupos. Na aula 4, o objetivo é associar os números reais aos pontos da circunferência trigonométrica, a aula é composta por duas atividades. Na atividade 1, associamos cada número real a um ponto da circunferência, propomos um desafio que represente todos os números reais a determinado ponto da circunferência. Na atividade 2, aplicaremos um vídeo explanando o conteúdo estudado.

Consideramos crucial a introdução e levantamento do conhecimento prévio do aluno, pois assim, servirá como pré-requisito para dar continuidade ao conteúdo, recordamos na primeira parte que as razões trigonométricas, seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo em um triângulo retângulos com intuito de definir a circunferência trigonométrica, depois a partir dos conhecimentos e a definição da circunferência trigonométrica utilizamos um o GeoGebra para exemplificar a construção e associação dos pontos na circunferência para melhor visualização e compreensão do aluno e dar continuidade a medida dos arcos, por fim através realizarmos exemplificações de exercícios dos conteúdos já explanados podemos realizar um diagnóstico do avanço do aluno quanto ao conteúdo matemático. Utilizamos nas atividades algumas vídeo aula explanando o conteúdo e a utilização do GeoGebra como ferramenta de ensino para melhor visualização e compreensão.

Quadro 4 - SD Circunferência Trigonométrica: Simetrias

<table>
<tr><td colspan="4" align="center">SEQUÊNCIA DIDÁTICA
ENSINO MÉDIO</td></tr>
<tr><td>Profª. Claudenice</td><td colspan="2">Turma: 2ª Série</td><td>Data: xxxxx
Duração: 2 aulas</td></tr>
<tr><td colspan="2">Área do conhecimento: Área da Matemática</td><td colspan="2">Componente Curricular: Matemática</td></tr>
<tr><td>Unidade Temática: Geometria e Medidas</td><td colspan="3">Objeto de conhecimento: Circunferência Trigonométrica: Simetrias</td></tr>
<tr><td colspan="4">Habilidade: (EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Desenvolvimento:

Aula 1 – Introdução e levantamento do conhecimento prévio

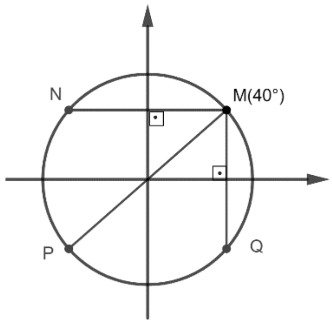
Atividade 1 – Apresentar o objetivo da aula, despertando a curiosidade sobre o tema.

O objetivo é determinar os pontos simétricos de um ponto dado na circunferência trigonométrica.
Simetrias</td></tr>
</table>

A importância de saber relacionar medidas de arcos trigonométricos com extremidades simétricas em relação a um dos eixos coordenados ou à origem do sistema cartesiano, nos ajudará posteriormente a calcular seno, cosseno, tangente etc. desses arcos.

Consideremos, o ponto *M*, da circunferência trigonométrica abaixo, associaremos à medida de 30°. Pelo ponto *M*, tracemos três retas: a perpendicular aos eixos das ordenadas, a que passa pela origem do sistema, e a perpendicular ao eixo das abcissas, interceptando a circunferência nos pontos *N*, *P* e *Q*, respectivamente.

Figura 66 - Pontos P, N, e Q simétricos de M

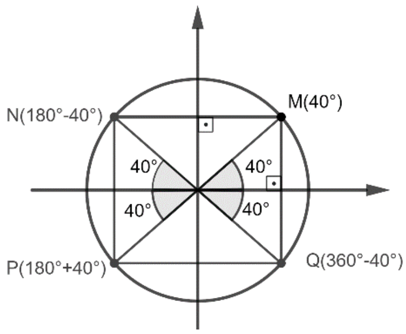


Fonte: Elaborado pela autora

Os pontos *P, N, e Q* são chamados de simétricos (ou correspondentes) do ponto M.

Vamos determinar as medidas as medidas associadas a esses pontos considerando apenas a 1ª volta no sentido anti-horário. Desenhamos o retângulo *MNPQ* e suas diagonais, conforme figura abaixo:

Figura 67 - Retângulo MNPQ e suas diagonais



Fonte: Elaborado pela autora

Por congruência de triângulos obtemos:

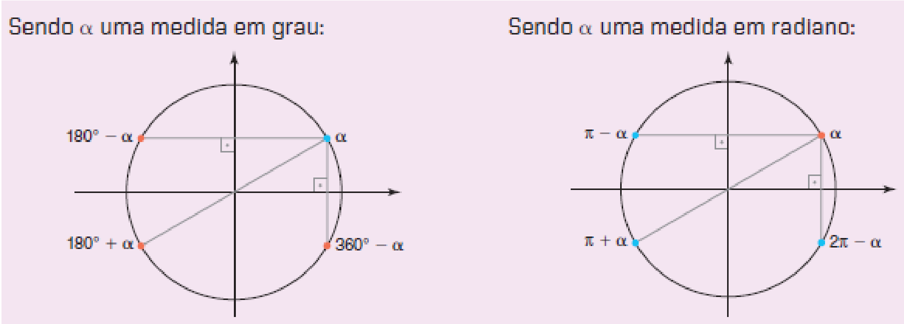
• Medida associada ao ponto $\boldsymbol{N}$: $\mathbf{180° - 40° = 140°}$

• Medida associada ao ponto $\boldsymbol{P}$: $\mathbf{180° + 40° = 220°}$

• Medida associada ao ponto $\boldsymbol{Q}$: $\mathbf{300° - 40° = 320°}$

Raciocinando de maneira análoga para qualquer arco trigonométrico de medida $\boldsymbol{\alpha}$ do primeiro quadrante, temos:

Figura 68 - α medida em grau e em radiano



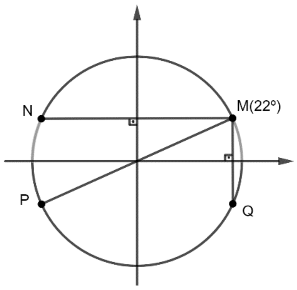
Fonte: PAIVA (2010, p.83)

Atividade 2 – Com intuito de explanar o conceito estudado, resolveremos alguns exercícios em sala, depois o aluno dará continuidade as resoluções do livro didático.

1º) Encontre as medidas associadas aos pontos N, P, e Q na 1ª volta positiva em cada circunferência trigonométrica abaixo:

a)

Figura 69 - Medidas em grau



Fonte: Elaborado pela autora

Resolução:

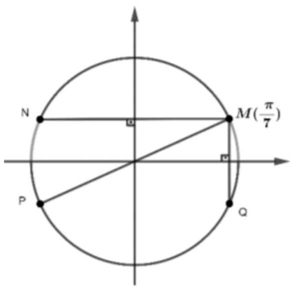
$N = 180° - \alpha$ $\quad$ $P = 180° + \alpha$ $\quad$ $Q = 360° - \alpha$

$N = 180° - 22°$ $\quad$ $P = 180° + 22°$ $\quad$ $Q = 360° - 22°$

$N = 158°$ $\quad$ $P = 202°$ $\quad$ $Q = 338°$

b)

Figura 70 - Medidas em radiano



Fonte: Elaborado pela autora

Resolução:

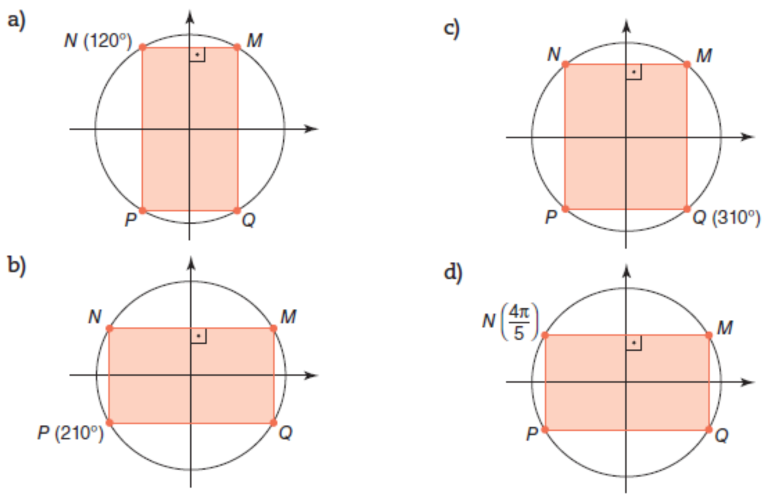
$N = \pi - \alpha$ $\quad$ $P = \pi + \alpha$ $\quad$ $Q = 2\pi - \alpha$

$N = \pi - \frac{\pi}{7}$ $\quad$ $P = \pi + \frac{\pi}{7}$ $\quad$ $Q = 2\pi - \frac{\pi}{7}$

$N = \frac{6\pi}{7}$ $\quad$ $P = \frac{8\pi}{7}$ $\quad$ $Q = \frac{13\pi}{7}$

2°) Determine as medidas associadas aos vértices dos retângulos inscritos nas circunferências trigonométricas na 1ª volta positiva.

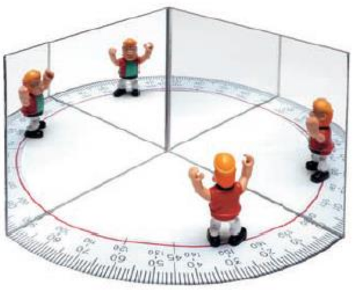
Figura 71 - Medidas em radiano



Fonte: PAIVA (2010, p.84)

3º) Considerando dois espelhos planos adjacentes, E_1 e E_2, cujas superfícies refletoras formam entre si um ângulo de 90°.

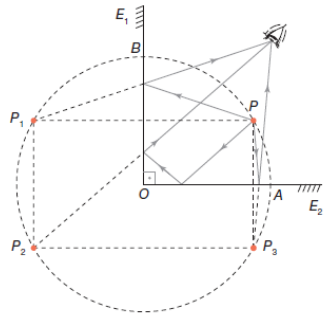
Figura 72 - ângulo de 90°



Fonte: PAIVA (2010, p.84)

Quando um ponto P, luminoso, é colocado no inferior do ângulo de 90°, as várias reflexões da luz proveniente de P dão origem à formação de três imagens, P_1, P_2 e P_3, tal que P e suas imagens pertencem a uma mesma circunferência de centro O e raio $\overline{\boldsymbol{OP}}$, conforme mostra o esquema abaixo:

Figura 73 - Representação gráfica da imagem anterior



Fonte: PAIVA (2010, p,84)

Sabendo que a medida do arco $\widehat{AP_1}$, no sentido anti-horário, é 148°, calcule a medida dos arcos $\widehat{AP}$, $\widehat{AP_2}$ e $\widehat{AP_3}$, nesse sentido.

Atividade 3 – Nesta atividade aplicaremos o vídeo: Simetria no ciclo trigonométrico - YouTube, explicando um pouco mais sobre simetria, em seguida por meio do link: https://www.geogebra.org/m/fXWu2TZZ o aluno poderá desenvolver a mesma atividade.

Aula 2: Faremos a correção dos exercícios, observando o nível de aprendizagem do aluno, e suas dificuldades para que não haja dúvida, pois a continuidade do conteúdo requer absorção do conteúdo anterior para que haja êxito no conteúdo abordado.

Recursos: papel, caneta e livro, recurso tecnológico (computador, tablet, celular).

Avaliação: Observação e registro das interações durante as aulas, produções individuais e em grupo.

Referências:
PAIVA, Manuel Rodrigues. Matemática: Paiva, 2 Edição. São Paulo: Moderna, 2010.p.914.
Simetria no ciclo trigonométrico - YouTube
https://www.geogebra.org/m/fXWu2TZZ

Fonte: Elaborado pela autora

Na SD, o objeto de conhecimento é circunferência trigonométrica: simetria, com duração de duas aulas. Na aula 1 é composta por três atividades, na atividade1 tratamos o conceito de simetria, na atividade 2 resoluções de alguns exercícios exemplificando o conteúdo, e continuidade dos exercícios do livro didático, na atividade 3 aplicamos um vídeo explicativo referente a simetria na circunferência trigonométrica e um link para interatividade ao vídeo assistido, e na aula 2 correções das atividades repassadas anteriormente, buscando tirar dúvidas quanto ao conteúdo repassado, verificando as dificuldades e aprendizagens do aluno.

Na SD fazemos um levantamento prévio recordando sobre associação dos pontos na circunferência, com objetivo de determinar os pontos simétricos de um ponto dado na circunferência trigonométrica, depois explanar o assunto quanto suas medidas em grau e em radiano exemplificando cada um, por fim realizar o diagnóstico do avanço do aluno quanto ao conteúdo realizado em cada etapa, na resolução de problema que envolva o cotidiano do aluno e demais. Além, do livro didático fazemos o uso de vídeos aulas explicativas abordando o conteúdo e utilizamos o GeoGebra para exemplificar o assunto desenvolvido.

Quadro 5 - SD Seno e cosseno de um arco trigonométrico

<table>
<tr><td colspan="4">SEQUÊNCIA DIDÁTICA
ENSINO MÉDIO</td></tr>
<tr><td>Profª. Claudenice</td><td colspan="2">Turma: 2ª Série</td><td>Data: xxxxx
Duração: 3 aulas</td></tr>
<tr><td colspan="2">Área do conhecimento: Área da Matemática</td><td colspan="2">Componente Curricular: Matemática</td></tr>
<tr><td>Unidade Temática: Geometria e Medidas</td><td colspan="3">Objeto de conhecimento: Seno e cosseno de um arco trigonométrico</td></tr>
<tr><td colspan="4">Habilidade: (EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.</td></tr>
<tr><td colspan="4">

Desenvolvimento:

Aula 1 – Introdução e levantamento do conhecimento prévio

Atividade 1 – Apresentar o objetivo da aula, despertando a curiosidade sobre o tema.

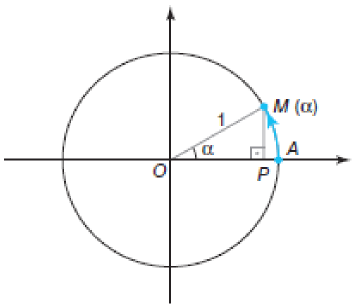
O objetivo é determinar o seno e cosseno de um arco trigonométrico de qualquer quadrante. Nessa atividade aplicaremos um vídeo https://www.youtube.com/watch?v=TyX6tua5mkE, com intuito de uma breve revisão ao conteúdo já estudado e em seguida daremos continuidades como o conteúdo de seno e cosseno de um arco trigonométrico.

Seno e cosseno de um arco trigonométrico

Com base no estudo de seno e cosseno de um ângulo agudo de um triângulo retângulo, estenderemos o conceito de seno e cosseno para um arco trigonométrico, vejamos:

Considere um arco trigonométrico $\boldsymbol{\widehat{AM}}$ de medida $\boldsymbol{\alpha}$, com $\mathbf{0°} < \boldsymbol{\alpha} < \mathbf{90°}$.

Figura 74 - Triângulo retângulo na circunferência



Fonte: PAIVA (2010, p. 85)

Observe que o raio da circunferência mede 1 e a medida do ângulo central $\boldsymbol{M\hat{O}A}$ é igual à medida do arco $\boldsymbol{\widehat{AM}}$, em grau, temos no triângulo retângulo *OMP*.

$$\boldsymbol{\cos\alpha\ \frac{OP}{1} = OP}$$

</td></tr>
</table>

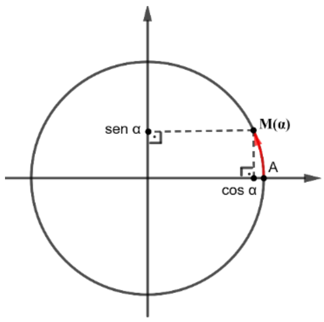
$$sen\ \alpha\ \frac{PM}{1} = PM$$

Portanto, $\boldsymbol{cos\ \alpha}$ e $\boldsymbol{sen\ \alpha}$, são respectivamente, a abscissa e ordenada do ponto M.

Ampliando esse conceito para qualquer arco trigonométrico pela definição:

Dado um arco trigonométrico $\boldsymbol{\widehat{AM}}$ de medida $\boldsymbol{\alpha}$, chama-se cosseno e seno de $\boldsymbol{\alpha}$ a abscissa e a ordenada do ponto M, respectivamente**.**

Figura 75 - Seno e cosseno



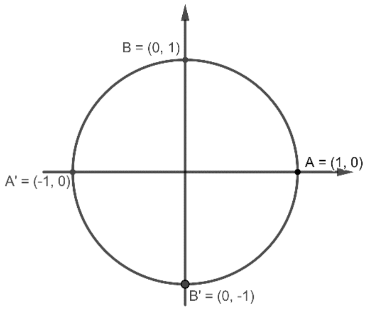
Fonte: Elaborado pela autora

- $\mathbf{cos}\ \boldsymbol{\alpha}$ = abscissa de M.
- $\mathbf{sen}\ \boldsymbol{\alpha}$ = ordenada de M.

Exemplificando: Determine o cosseno e seno de $\mathbf{0°}$, $\mathbf{90°}$, $\mathbf{180°}$, $\mathbf{270°}$ e $\mathbf{360°}$.

Para isso marcamos os pontos na circunferência trigonométrica os pontos A, B, A' e B' associado a essas medidas, conforme figura abaixo:

Figura 76 - Cosseno e seno do arco



Fonte: Elaborado pela autora

Como a abscissa e a ordenada de cada ponto da circunferência trigonométrica representam, respectivamente, o cosseno e seno do arco com extremidade no ponto, temos:

$\cos 0° = 1$	$\operatorname{sen} 0° = 0$
$\cos 90° = 0$	$\operatorname{sen} 90° = 1$
$\cos 180° = -1$	$\operatorname{sen} 180° = 0$
$\cos 270° = 0$	$\operatorname{sen} 270° = -1$
$\cos 360° = 1$	$\operatorname{sen} 360° = 0$

Como qualquer coordenada de um ponto da circunferência trigonométrica é no máximo 1 e no mínimo -1, concluímos:

$$\boldsymbol{-1 \leq \cos x \leq 1}$$

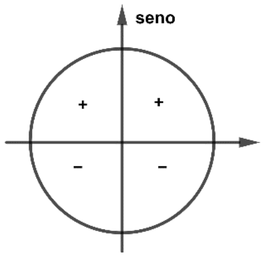
$$-\mathbf{1} \leq \boldsymbol{sen\,x} \leq \mathbf{1}$$

Atividade 2 **–**Aplicaremos o vídeo: http://www.youtube.com/watch?v=TcNZZx8HvVI, cujo objetivo é explanar o conceito de seno e cosseno de um arco trigonométrico. Dando continuidade com a variação do sinal seno e cosseno.

Variação de sinal do seno

Vimos que o seno de um arco é a ordenada da extremidade desse arco. Como os pontos de ordenadas positivas são os do 1º e os do 2º quadrante e os pontos de ordenadas negativas são os do 3º e 4° quadrante, temos o seguinte esquema de sinais para o seno.

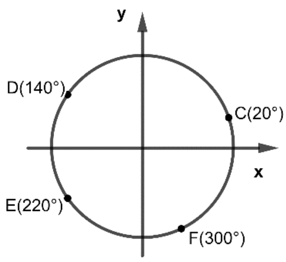
Figura 77 - Variação de sinal do seno



Fonte: Elaborado pela autora

Exemplo: Os arcos trigonométricos de 20°, 140°, 220° e 300° tem extremidades nos pontos C, D, E, e F, respectivamente, conforme figura abaixo:

Figura 78 - Arcos trigonométricos



Fonte: Elaborado pela autora

Observando que:

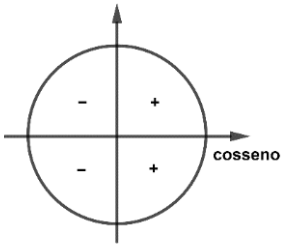
• C e D são pontos do 1º e do 2° quadrante e $\boldsymbol{sen\,20°}$ e $\boldsymbol{sen\,140°}$ são as ordenadas desses pontos, respectivamente, temos $\boldsymbol{sen\,20°}$ e $\boldsymbol{sen\,140°}$ positivos;

• E e F são pontos do 3° e 4° quadrante e $\boldsymbol{sen\,220°}$ e $\boldsymbol{sen\,300°}$ as ordenadas desses pontos, respectivamente, temos $\boldsymbol{sen\,220°}$ e $\boldsymbol{sen\,300°}$ negativos.

Variação de sinal do cosseno

Vimos que o cosseno de um arco é a abscissa da extremidade desse arco. Como os pontos de abscissas positivas são os do 1º e os do 4º quadrante e os pontos de abscissas negativas são os do 2º e 3º quadrante, temos o seguinte esquema de sinais para o cosseno.

Figura 79 - Variação de sinal cosseno



Fonte: Elaborado pela autora

Exemplo: Na figura do exemplo anterior, observando que:

• *C* e *F* são pontos do 1º e do 4° quadrante e $\boldsymbol{cos\ 20}$° e $\boldsymbol{cos\ 300}$° são as abscissas desse ponto, respectivamente, temos $\boldsymbol{cos\ 20}$° e $\boldsymbol{cos\ 300}$° positivos;

• *D* e E são pontos do 2° e 3° quadrante e $\boldsymbol{cos\ 140}$° e $\boldsymbol{cos\ 320}$° são as abscissas desses pontos, respectivamente, temos $\boldsymbol{cos\ 140}$° e $\boldsymbol{cos\ 320}$° negativos.

Atividade 3 – Aplicaremos o vídeo: http://www.youtube.com/watch?v=lMXMdNjX6P4&t=157s, objetivo de recordar a construção da tabela trigonométrica dos arcos notáveis. Depois apresentaremos a tabela trigonométrica dos arcos notáveis considerando as medidas como medidas de arcos trigonométricos.

Tabela trigonométrica dos arcos notáveis

Pela igualdade entre medidas do arco e do ângulo central que determina esse arco na circunferência trigonométrica, concluímos que o seno (ou cosseno) de um ângulo central é igual ao seno (ou cosseno) do arco determinado por esse ângulo na circunferência trigonométrica. O que válida a tabela trigonométrica dos ângulos notáveis (30°, 45°, e 60°) se considerarmos essas medidas como medidas de arcos trigonométricos.

Tabela 2 - Valores

	$30°\ ou\ \frac{\pi}{6}\ rad$	$45°\ ou\ \frac{\pi}{4}\ rad$	$60°\ ou\ \frac{\pi}{3}\ rad$
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Fonte: Elaborado pela autora

Aula 2: Faça a resolução dos exercícios proposto a partir da questão 19 a 28, referente a página 87 do livro didático.

Atividade 1 – Resolução dos exercícios proposto no livro didático

Atividade 2 - Faremos a correção dos exercícios proposto na aula 2, observando o nível de aprendizagem do aluno, e suas dificuldades em relação ao conteúdo estudado.

Recursos: papel, caneta e livro, recurso tecnológico (computador, tablet, celular).

Avaliação: Observação e registro das interações durante as aulas, produções individuais e em grupo.

Referências:

PAIVA, Manuel Rodrigues. Matemática: Paiva, 2 Edição. São Paulo: Moderna, 2010.p.914.
https://www.youtube.com/watch?v=TyX6tua5mkE.

http://www.youtube.com/watch?v=TcNZZx8HvVI.

Fonte: Elaborado pela autora

Nesta SD o objeto de conhecimento é seno e cosseno de um arco trigonométrico, voltado para 2ª série do Ensino Médio. A SD é composta por duas aulas, cujo objetivo é determinar o seno e o cosseno de um arco trigonométrico de qualquer quadrante, variação do sinal do seno e cosseno e aplicabilidade da tabela trigonométrica dos arcos notáveis. A aula 1é composta por três atividades, na atividade 1 desenvolvemos o seno e cosseno no arco trigonométrico, na atividade 2 explanamos o conceito de seno e cosseno de um arco trigonométrico através de um vídeo explicativo, na atividade 3 desenvolvemos a tabela trigonométrica dos arcos notáveis.

A Aula 2 é composta por duas atividades, onde atividade 1 é proposto a resolução dos exercícios proposto no livro didático. Na atividade 2, concluímos com a correção dos exercícios proposto, buscando observar e avaliar o ensino e aprendizagem. Dando sequência ao estudo de circunferência trigonométrica, onde objetivo é determinar o seno e cosseno de um arco trigonométrico de qualquer quadrante. Faremos um levantamento prévio do aluno quanto ao conteúdo já estudado com uma breve revisão do conteúdo através de um vídeo aula exemplificando cada passagens, na segunda parte prosseguiremos explanando o conteúdo de seno e cosseno no arco trigonométrico, determinando a medidas quanto as relações trigonométricas seno e cosseno na circunferência, variações do sinal e a tabela trigonométrica. Finalizando com o diagnóstico do conhecimento matemático realizado no final de cada etapa através de observações quanto aprendizagem do aluno ou dificuldades dos mesmos ao realizarem proposta de exercícios, inclusive as que envolvam problemas do cotidiano do aluno. Nesta SD incrementamos vídeo aula explicando o assunto de maneira clara e objetiva, também é apresentado um vídeo aula explicitando através do uso do GeoGebra o conteúdo abordado.

Quadro 6 - SD Redução ao 1º quadrante e Relação fundamental da trigonometria

SEQUÊNCIA DIDÁTICA
ENSINO MÉDIO

Profª. Claudenice	**Turma:** 2ª Série	**Data:** xxxxxx **Duração:** 3aulas

Área do conhecimento: Área da Matemática	**Componente Curricular:** Matemática
Unidade Temática: Geometria e Medidas	**Objeto de conhecimento:** Circunferência Trigonométrica: Redução ao 1º quadrante e Relação fundamental da trigonometria

Habilidade: (EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

Desenvolvimento:

Aula 1 – Introdução e levantamento do conhecimento prévio

Atividade 1 – Apresentar o objetivo da aula, despertando a curiosidade sobre o tema.

O objetivo é relacionar o seno e cosseno de um arco com o seno e o cosseno de seus arcos correspondente, e aplicar a relação fundamental da trigonometria.

Redução ao 1º quadrante

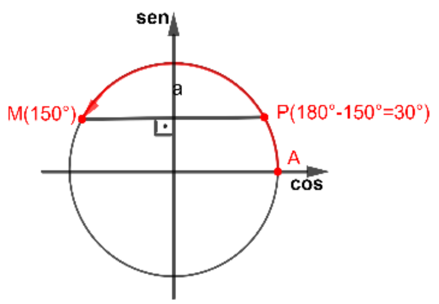
Podemos determinar o seno ou cosseno de um arco simétrico do, do 3º ou do 4º quadrante a partir do seno ou cosseno de um arco do 1º, vejamos:

Exemplo: Consultando a tabela trigonométrica dos arcos notáveis, determine:

a) $\boldsymbol{sen\ 150°}$ e $\boldsymbol{cos\ 150°}$

Resolução 1: Observe que a extremidade M do arco de 150° pertence ao 2° quadrante, traçando por M a reta perpendicular ao eixo dos senos, obtendo o ponto P, simétrico de M no 1° quadrante, conforme figura abaixo:

Figura 80 - Ordenadas iguais e abscissas opostas



Os pontos M e P têm ordenadas iguais e abscissas opostas, logo:

$$sen\ 150° = sen\ 30° = \frac{1}{2}$$

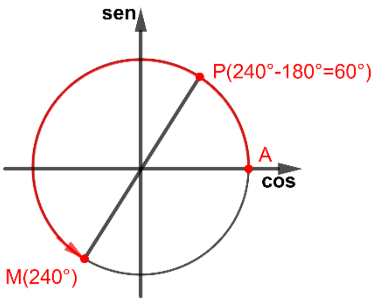
$$cos\ 150° = -cos\ 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Fonte: Elaborado pela autora

b) $\boldsymbol{sen\ 240°}$ e $\boldsymbol{cos\ 240°}$

Resolução 2: Observe que a extremidade M do arco de 240° pertence ao 3° quadrante, traçando por M a reta que passa pelo centro da circunferência, obtendo o ponto P, simétrico de M no 1° quadrante, conforme figura abaixo:

Figura 81 - Ordenadas opostas e abscissas opostas



Fonte: Elaborado pela autora

Os pontos M e P têm ordenadas opostas e abscissas opostas, logo:

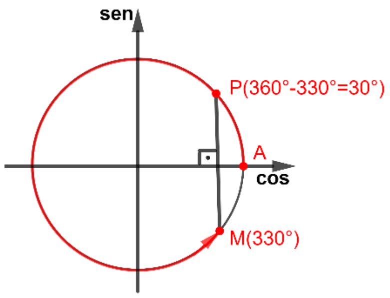
$$sen\ 240° = -sen\ 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos\ 240° = -cos\ 60° = -\frac{1}{2}$$

c) $\boldsymbol{sen\ 330°}$ e $\boldsymbol{cos\ 330°}$

Resolução 3**:** Observe que a extremidade M do arco de 330° pertence ao 4° quadrante, traçando por M a reta perpendicular ao eixo dos cossenos, obtendo o ponto P, simétrico de M no 1° quadrante, conforme figura abaixo:

Figura 82 - Ordenadas opostas e abscissas iguais



Fonte: Elaborado pela autora

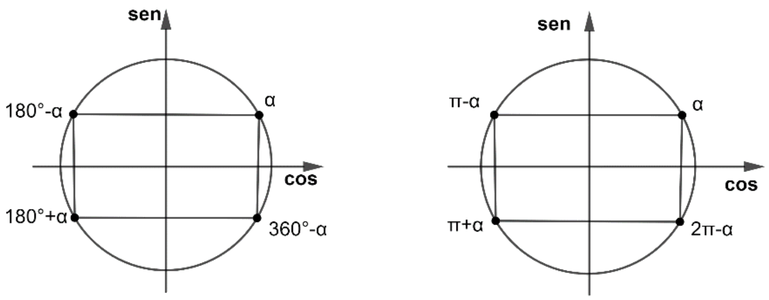
Os pontos M e P têm ordenadas opostas e abscissas iguais, logo:

$$sen\ 330° = -sen\ 30° = -\frac{1}{2}$$

$$cos\ 330° = cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Relacionando de maneira análoga para qualquer arco trigonométrico de medida $\boldsymbol{\alpha}$ do 1° quadrante, temos as seguintes relações:

Figura 83 - α medida em grau e radiano



Fonte: Elaborado pela autora

Se $\boldsymbol{\alpha}$ é uma medida em grau:

$$sen(180° - \propto) = sen \propto$$

Se $\boldsymbol{\alpha}$ é uma medida em radiano:

$$sen(\pi - \propto) = sen \propto$$

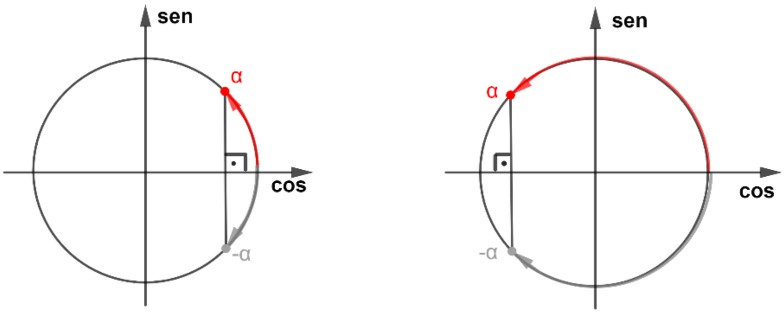
$cos(180°-\propto) = -cos \propto$	$cos(\pi-\propto) = -cos \propto$
$sen(180°+\propto) = -sen \propto$	$sen(\pi+\propto) = -sen \propto$
$cos(180°+\propto) = -cos \propto$	$cos(\pi+\propto) = -cos \propto$
$sen(360°-\propto) = -sen \propto$	$sen(2\pi-\propto) = cos \propto$
$cos(360°-\propto) = cos \propto$	$cos(2\pi-\propto) = cos \propto$

Observação: Essas medidas continuam válida mesmo que $\propto$ não seja uma medida do 1º quadrante.

Arcos de medidas opostas

Arcos de medidas opostas, $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{-\alpha}$ tem extremidades em relação aos eixos das abscissas, observe as figuras abaixo:

Figura 84 - Arcos de medidas opostas



Fonte: Elaborado pela autora

Daí, concluímos que:

$\mathbf{cos}(-\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{cos\ \alpha}$
$\mathbf{sen}(-\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{-sen\ \alpha}$

Exemplos: Calcularemos os seguintes valores usando a simetria.
a) $\mathbf{cos\ (-60°) = cos\ 60° = \frac{1}{2}}$

b) $\mathbf{sen\ (-135°) = -}\boldsymbol{sen}\ \mathbf{135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}}$

Atividade 2 **–** Resolveremos alguns exercícios do livro explanando o conteúdo estudado na atividade 1.

Exercício 1: Sendo $\boldsymbol{\alpha}$ uma medida em grau, com $\boldsymbol{cos\ \alpha \neq 0}$, simplificar a expressão:

$$\boldsymbol{E = \frac{cos(360° - \alpha) - cos(180° - \alpha)}{\mathbf{cos}\ (180° + \alpha)}}$$

Resolução:

Sabemos que $\mathbf{cos(360° - }\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{cos\ \alpha}$,

$\boldsymbol{cos(180° - \alpha) = \ -cos}$ e $\mathbf{cos(180° + }\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{-cos\ \alpha}$

Logo:

$$\boldsymbol{E = \frac{cos(360° - \alpha) - cos(180° - \alpha)}{\mathbf{cos}\ (180° + \alpha)}}$$

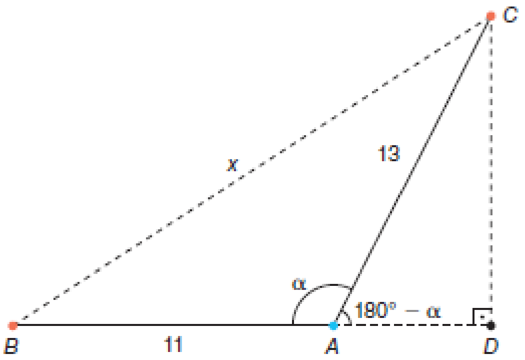
$$\boldsymbol{E = \frac{cos - \alpha(-cos\ \alpha)}{-\mathbf{cos}\ \ \alpha} = \frac{2\ cos\ \alpha}{-\mathbf{cos}\ \ \alpha} = -2}$$

Exercício 2: De um observatório astronômico A da Terra, um astrônomo estuda duas estrelas, B e C, constatando que o ângulo obtuso $\boldsymbol{B\widehat{A}C}$ mede $\propto$, com $\boldsymbol{cos} \propto = -\frac{5}{13}$, que *AB* = 11 anos-luz e *AC* = 13 anos-luz. Com esses dados, o cientista calculou a distância entre as estrelas *B* e *C*. Qual é essa distância em ano-luz?

Resolução:

Indicando por x a distância procurada e por D a projeção ortogonal do ponto C sobre a reta $\overleftrightarrow{\boldsymbol{AB}}$, esquematizamos:

Figura 85 - Triângulo ACD e BCD



Fonte: PAIVA (2010, p.90)

Assim, temos:

$$\begin{cases} cos(180° - \alpha) = \dfrac{AD}{13} \\ cos(180° - \alpha) = -cos\ \alpha = \dfrac{5}{13} \end{cases}$$

Logo: $\frac{AD}{13} = \frac{5}{13} \Longrightarrow AD = 5$

Aplicando o teorema de Pitágoras aos triângulos ACD e BCD, obtemos: $13^2 = 5^2 + (CD)^2$, segue que: CD= 12 e $x^2 = 5^2 + (CD)^2$, segue que: $x = 20$.
Portanto, a distância entre as estrelas B e C é igual a 20 anos-luz.

Atividade 3: Sugerir a resolução dos exercícios proposto do livro didático da página 91, para absorção do conteúdo (PAIVA, Manuel Rodrigues. Matemática: Paiva, 2 Edição. São Paulo: Moderna, 2010.p.914).

Aula 2: Nesta aula faremos a resolução dos exercícios sugerido na aula anterior, objetivando a participação dos alunos**.**

Atividade 1 – Solicitaremos a participação dos alunos para resolução dos exercícios no quadro, justificando suas respostas.

Atividade 2 - Faremos a correção dos exercícios proposto na aula 2, observando o nível de aprendizagem do aluno, e suas dificuldades em relação ao conteúdo estudado.

Aula 3: O objetivo é aplicar a relação fundamental da trigonometria.

Atividade 1:Desenvolveremos em três casos demonstrativo:

Para qualquer arco trigonométrico de medida $\boldsymbol{\alpha}$, temos:

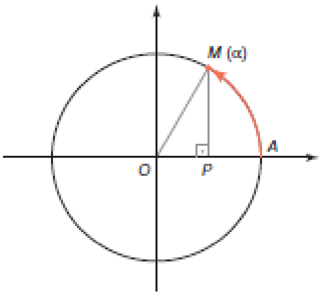
$\boldsymbol{sen^2\,\alpha + cos^2\alpha = 1}$

Para melhor compreensão, vamos demonstrar em três casos:

1°caso

Seja $\boldsymbol{\alpha}$ a medida de um arco trigonométrico do 1° quadrante.

Figura 86 – Medida do arco no 1° quadrante



Fonte: PAIVA (2010, p.92)

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo OMP, temos:

$$(\boldsymbol{MP})^2 + (\boldsymbol{OP})^2 = (\boldsymbol{OM})^2$$

Como a ordenada $\boldsymbol{MP = sen\ \alpha}$ e a abscissa $\boldsymbol{OP = cos\ \alpha}$ e OM = 1, substituindo na fórmula temos que:

$$(\boldsymbol{sen\ \alpha})^2 + (\mathbf{cos\ \alpha})^2 = (\mathbf{1})^2$$

Logo,

$$(\boldsymbol{sen\ \alpha})^2 + (\mathbf{cos\ \alpha})^2 = (\mathbf{1})^2$$

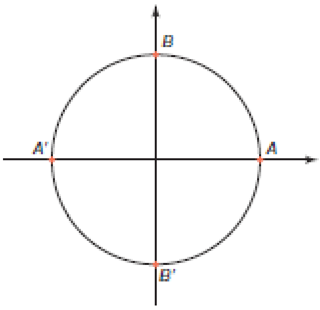
Desta relação podemos obter ainda:

$$\boldsymbol{sen^2\ \alpha = 1 - cos^2}$$
$$\boldsymbol{cos^2 \alpha = \ 1 - sen^2\ \alpha}$$

2º caso:

Seja α a medida de um arco trigonométrico com extremidade sobre um dos eixos coordenado.

Figura 87 - α medida do arco com extremidade no eixo coordenado



Fonte: PAIVA (2010, p.92)

• No ponto A, em que $\boldsymbol{sen\ \alpha = 0}$ e $\boldsymbol{cos\ \alpha}$ = 1, constatamos a validade da relação fundamental, pois $o^2 + 1^2 = 1$;

• No ponto B, em que $\boldsymbol{sen\ \alpha = 1}$ e $\boldsymbol{cos\ \alpha = 0}$, constatamos a validade da relação fundamental, pois $1^2 + 0^2 = 1$;

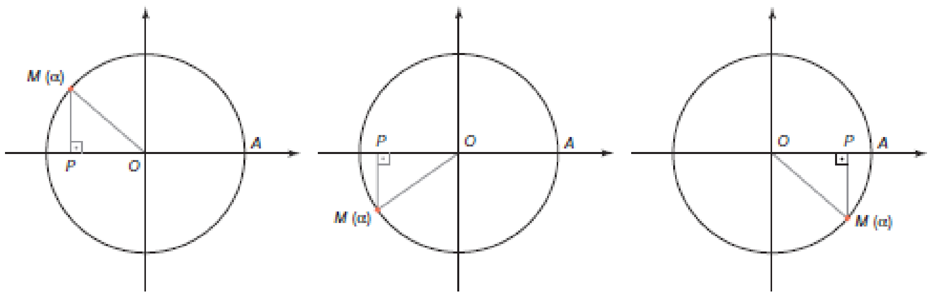
• No ponto A', em que $\boldsymbol{sen\ \alpha = 0}$ e $\boldsymbol{cos\ \alpha = -1}$, constatamos a validade da relação fundamental, pois $0^2 + (-1)^2 = -1$

• No ponto B', em que $\boldsymbol{sen\ \alpha = -1}$ e $\boldsymbol{cos\ \alpha = 0}$, constatamos a validade da relação fundamental, Pois $(-1)^2 + 0^2 = 1$

3°caso:

Seja α a medida de um arco trigonométrico do 2°, do 3° ou do 4° quadrante.

Figura 88 - α medida do arco com extremidade no eixo coordenado



Fonte: PAIVA (2010, p.93)

Pelo teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo OMP de cada figura, temos:

$(MP)^2 + (OP)^2 = (OM)^2$

Em cada um dos triângulos OMP, podemos afirmar que: MP = $|\boldsymbol{sen\ \alpha}|$, OP = $|\boldsymbol{cos\ \alpha}|$ e OM = 1 raio

Logo,

$$|\boldsymbol{sen\ \alpha}|\,|^2 + |\boldsymbol{cos\ \alpha}|^2 = 1$$

Lembrando que a propriedade $|\boldsymbol{x}|^2 = x^2$, do módulo de um número real x, concluímos:

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

Note que.com base nessa relação, podemos expressar o seno em função do cosseno e vice-versa:

$sen^2\alpha = 1 - cos^2\alpha$ e $cos^2\alpha = 1 - sen^2\alpha$

Atividade 2: Faremos alguns exemplos e posteriormente aplicaremos uma série de exercícios a serem resolvidos do livro didático

Recursos: papel, caneta e livro.

Avaliação: Observação e registro das interações durante as aulas, produções individuais e em grupo.

Referências: PAIVA, Manuel Rodrigues. Matemática: Paiva, 2 Edição. São Paulo: Moderna, 2010. p.914.

Fonte: Elaborado pela autora

Na SD, o objeto de conhecimento é Circunferência Trigonométrica: Redução ao 1º quadrante e Relação fundamental da trigonometria, desenvolvida para turma da 2ª série do Ensino Médio, com duração de três aulas, onde a aula 1 é composta por 3 atividade, na atividade 1 desenvolvemos a redução ao 1° quadrante, arcos sobre medidas oposta. Na atividade 2 exemplificamos alguns exercícios, e na atividade 3 aplicamos a lista de exercício proposta no livro didático. Com objetivo de determinar o seno e cosseno de um arco trigonométrico de qualquer quadrante. Lembraremos da correspondência de um ponto na circunferência e a relação dos quadrantes, depois explanaremos o conteúdo abordado exemplificando a redução ao primeiro quadrante e depois Relacionando de maneira análoga para qualquer arco trigonométrico de medida α do 1° quadrante, dando sequência a medida de arcos oposto, finalizando com diagnóstico de cada etapa desenvolvida, observando sempre a evolução ou dificuldade encontrada em uma determinada resolução. Nesta SD utilizamos apenas dos conceitos estudado e o livro didático para desenvolvimento da mesma.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho objetivou elaborar Sequências Didáticas para o ensino de Razões trigonométricas na circunferência: seno e cosseno. Foi desafiador construir SD para os referidos conteúdos, porém elaborá-las foi de crucial importância para esta futura docente em Matemática, pois precisamos estar aptos a construir um saber docente que contribua no processo de ensino e aprendizagem, seguindo competentemente as orientações da BNCC agregando os saberes adquiridos durante a formação.

As dificuldades encontradas para a elaboração das SD a princípio foi o conteúdo a ser abordado sobre Razões trigonométricas na circunferência para seno e cosseno, e segundo foi a utilização do Software GeoGebra para elaboração de atividades em determinado conteúdo, assim como também a elaboração de figuras destacadas neste trabalho, tendo em vista que o conteúdo em si é complexo e requer domínio tanto na parte conceitual quanto na prática, e elaborar SD neste contexto implicou desenvolver mais ainda habilidades nessa modalidade de ensino que foram as SD para o Ensino Médio. Pensar em elaborar as SD nesse contexto, me fez refletir como este trabalho pode contribuir no processo de ensino e aprendizagem na área da Matemática, e como fonte de pesquisa futuramente tanto para alunos e futuros docentes.

A presente pesquisa proporcionou a esta discente organização pedagógica, auxiliando no manuseio de recursos didáticos, planejamento do tempo estimado para cada aula, incentivando a pesquisa, a experimentação, a reflexão quanto ao ensino e aprendizagem, contribuindo assim para formação docente, pois temos a oportunidade de planejar didaticamente diversas possibilidades do fazer docente, e a construção das Sequência Didáticas nos permite lançar mãos não só do conhecimento matemático, mas atribuir possibilidade que melhorem o ensino e que podemos refletir sobre a nossa prática de ensino baseado no diagnóstico de assimilação do aluno a cada etapa do processo de ensino e aprendizagem e em que podemos melhorar futuramente.

REFERÊNCIAS

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília, DF, 2018.

COSTA, D. E.; GONÇALVES, T. O. O processo de construção de sequência didática como (pró) motor da educação matemática na formação de professores. XII Encontro Nacional de Educação matemática, São Paulo 2016. p. 12.

DOLCE, Osvaldo; POMPEU, J. Nicolau. Fundamentos da matemática elementar 9: geometria plana, 9 ed., São Paulo: Atual, 2013.p.468.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos. 3.ed.rev - Campinas, SP: Autores Associados, 2012.

IEZZI, Gelson, Fundamentos da matemática elementar, 3:trigonometria, 9. ed., São Paulo: Atual, 2013.p.324.

NASCIMENTO, Maurício Alves. Ensino-aprendizagem de trigonometria: Explorando e resolvendo problemas. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, XI, 2013, Curitiba. Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática – ISSN 2178-034X. Curitiba: 2013. p. 4.

PAIVA, Manuel Rodrigues. Matemática: Paiva, 2 Edição. São Paulo: Moderna, 2010.p.914.

ZABALA, Antoni. A prática educativa: como ensinar; trad. Ermani F. da F. Rosa_Porto Alegre: ArtMed,1998.